

8243

The Department of Public Instruction, Bombay.

THE FIRST BOOK
OF
EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY
FOR
GUJARATI SCHOOLS.

BY
JAMSHEDJEE ARDESHIR DALÁL, M.A., LL.B.,
PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

8243

The Department of Public Instruction, Bombay.

THE FIRST BOOK
OF
EUCLID'S ELEMENTS OF GEOMETRY
FOR
GUJARATI SCHOOLS.

BY
JAMSHEDJEE ARDESHIR DALÁL, M.A., LLB.
PRINCIPAL, GUJARAT COLLEGE, AHMEDABAD.

10,000 COPIES.

*Registered for Copyright under the Government of India's
Act XXV. of 1867.*

Bombay :
GOVERNMENT CENTRAL BOOK DEPÔT.

1889.

(All rights reserved.)

Price As. 8.

BOMBAY :
PRINTED AT THE EDUCATION SOCIETY'S PRESS, BYCULLA.

૪૨૫૩

મુંબઇ ઇલાકાતું કેળવણીખાતું.

યુકિલડની ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વો

સ્કંધ ૧.

ગૂજરાતી નિશાળોને માટે.

જમશેદજી અરદેશર દલાલ

એમ. એ.; એલ એલ. બી.;

અમદાવાદ ગૂજરાત કોલેજના પ્રિન્સિપાલ એચ્.એચ્. રચે.

૧૦,૦૦૦ પ્રતો.

આ પુસ્તકની માલિકી હિંદ સરકારના સને ૧૯૬૦ ના
રપમા આકટ મુજબ નોંધેલી છે.

—૦૦૦૦૦—

મુંબઇ :

ગવર્નમેંટ સેન્ટ્રલ પ્રિંટ ઈપો.

૧૮૮૯.

સરકારે બધા હકક સ્વાધીન રાખ્યાછે.

કિંમત ૮ આના.

મુંબઈ:

એન્ડ્રુકેશન સોસાયટીના છાપખાનામાં છાપ્યું છે.

પ્રસ્તાવના.

ભૂમિતિનાં મૂળતત્ત્વનું ભાષાન્તર ઘણું વર્ષ ઉપર ઉત્તર વિ-
ભાગના ગૂજરાતીભાષાન્તરકર્તા મેહેરબાન જેમ્સ ગ્રેહામ સાહેબે
ગૂજરાતી ભાષામાં પ્રસિદ્ધ વિદ્વાન, મેહેરબાન નંદશંકર તુળજ-
શંકરની અમુલ્ય સહાયતાથી કર્યું હતું. ઘણી રીતે એ ભાષાન્તર
ઉત્તમ છે, તોપણ એ વિષયમાં પ્રવેશ પામેલા વિદ્યાર્થી શિવાય
ખીજાએને એ સ્પષ્ટ અને સુગમ પડે એવું નથી. એની ભાષા
સંક્ષિપ્ત છે, અને સિદ્ધાંતનો પક્ષ પણ તેવાજ સંક્ષેપમાં સિદ્ધ
કર્યો છે. પક્ષ માંનાં સ્પષ્ટ અથવા સહેલથી સમજાય એવાં સિદ્ધ-
તાનાં કારણો મૂકી દેવામાં આવ્યાં છે, અને માત્ર મુખ્ય કારણજ
આપ્યાં છે. એ પુસ્તક હંચા વર્ગના શિષ્યોને માટે લખેલું હોય
એમ સ્પષ્ટ ભાસે છે; કેમકે એમાં આપેલી ટીકાથી પણ વાંચ-
નારનું મન ગણિતશાસ્ત્રનાં હંચાં પ્રકરણ ત્રરફ લોભાય છે. પણ
એ અન્યનો હેતુ નવાસવા શિષ્યોને મદદ કરવાનો નથી અથવા
હલકા વર્ગની પરીક્ષા માટે શાલાપુસ્તક તરીકે ખપવાનો નથી.
તેથી એવી મતલબ એ અન્યથી સરે નહિ, અને વર્ગમાં નવા-
સવા શિષ્યોને આ વિષય શિખવવો હોય એવા શિક્ષકો તર-
ફથી એ અન્યની સામા વાજખી વાંધા ઉટે એમાં કંઈ નવાઈ
નથી. આ કારણથી કેળવણીખાતાના અધિપતિએ અંગ્રેજી
નિશાળોમાં બીચલા વર્ગમાં ચાલતા ઉચ્ચ અન્યોનો નમુનો
લઈ ગૂજરાતીશાલા માટે ખીજું ભાષાન્તર તૈયાર કરવા હુકમ
કર્યો.

તેજ પ્રકારનો પ્રયત્ન આ પુસ્તકમાં કરવામાં આવ્યો છે. આ
અન્યને સહેલી તેમજ શુદ્ધ ભાષામાં લખવાને ઘણીજ સંભાળ

લીધી છે; અને આશા રાખવામાં આવે છે કે શિક્ષકોને આ વિષય શિખવવાની મહેનત યોગ્ય પડશે એટલુંજ નહિ પણ ઉદ્યોગી શિષ્ય શિક્ષકની મદદથી અથવા મદદ શિવાય પણ આ વિષયમાં સારું જ્ઞાન સંપાદન કરવા શક્તિમાન થશે.

પારિભાષિક શબ્દો મેહેરબાન ગ્રેહામ સાહેબના ભાષાન્તરમાંથી લીધા છે. પણ ૨૦ ૨૦ રાવજી મોરેશ્વર દેવકુળેની મરાઠી ભૂ-મિતિમાંથી ઘણી અમુલ્ય સૂચનાઓ મળી આવી છે. ઘણા સવાલ પણ એમનાજ ગ્રંથમાંથી દાખલ કરીયા છે. આ મોટે ઘણી ખુશીથી હું એમનો ઉપકાર માનું છું.

આ ગ્રંથની સામાન્ય રચના ઉત્તર વિભાગના કેળવણી-ખાતાના પરીક્ષક મેહેરબાન જાહાસ સાહેબના કહેવા પ્રમાણે હોલ અને રૂઢીવંસની ભૂમિતિભાગ ૧ ને અનુસરીને કરીધી છે. આ ભૂમિતિ પુસ્તક હાલમાં નવાં લખાયેલાં પુસ્તકોમાંનું એક છે, એને અંગ્રેજી નિરાળોમાં શાલાપુસ્તક તરીકે ઘણું ફત્તેહમંદ નીવડ્યું છે. એ પુસ્તક રચનારાઓએ પોતાના શાલાપુસ્તકોની રચના ઘણા અનુભવી શિક્ષકોની અનુમતિ લઈ કરીધી છે, અને એ શિક્ષકો તરફથી તેમને ઘણી કિમતિ સૂચનાઓ મળી છે. તે અંગ્રેજી પુસ્તકને અનુસરીને આ ગ્રંથ લખવામાં આવ્યો છે; તેથી એ ગ્રંથનો હેતુ ખરોખર પાર પડશે એવી આશા રાખવામાં આવે છે.

‘પાઠસ અને ટોડહન્ટર’ના ગ્રંથોમાં આપ્યાં છે તેમજ સિદ્ધતાનાં બધાં કારણો અનુક્રમે આપ્યાં છે. વળી સિદ્ધતા સ્પષ્ટ કરવા મોટે નવાં કારણો પણ દાખલ કર્યાં છે; પણ એવું ક્લેષિતજ કરવામાં આવ્યું છે, જે મહે પેહેલા સંકલ્પના ૪૪ માં સિદ્ધાંતમાં. દરેક સિદ્ધાંતમાં પ્રતિજ્ઞા, સાધન, રચના, અને સિદ્ધતા ખુલ્લી રીતે પૃથક્ પાડ્યાં છે, અને પ્રત્યેક નવું સિદ્ધાંતનું કારણ

નવી લીટીમાં શરૂ કર્યું છે. વિદ્યાર્થીને આ વિષયને લગતી આ-
જીબાજીની બાબદમાં મદદ કરવાને ગૂજરાતી ભાષામાં અન્ય ન
હોવાથી સઘળો બાપ્પાએ, રવીંદ્રતટ્ટ્યો, અને પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો
ઉપર પુષ્કળ ટિપ્પણ આપ્યું છે, અને એ શબ્દો બરોબર સ-
મજાવવા ધણી મહેનત લીધી છે. વળી સઘળા અગત્યના સિ-
દ્ધાંતો ઉપર પણ ધણી ટીકા કરવામાં આવી છે.

દરેક સિદ્ધાંતને લગતા થોડાક સવાલ આપવામાં આવ્યા છે.
એમાંના ધણા આકૃતિમાં અથવા રચનામાં લીટીએના ફેરફાર
કરવાના સંબંધમાં આપ્યા છે. અગત્યના સિદ્ધાંતના દરેક સમૂ-
હને અંતે સેહેલા પ્રશ્નો આપવામાં આવ્યા છે. આ બધા સ-
વાલો અને પ્રશ્નો યાતો વર્ગમાં અથવા ધેરથી મનોમત તરફ
શિષ્યવર્ગ પાસે શિક્ષક સિદ્ધ કરાવશે તો ધણો ફાયદો થશે. આ-
સરે સે સવાલ બધું મળીને છે અને તેટલાજ પ્રશ્નો પણ છે.

અધરૈ સિદ્ધાંત સુગમ કરવાની મતલબથી કેટલેક પ્રસંગે,
જેમકે ચોથા સિદ્ધાંતમાં, સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરતાં પહેલાં સમજીતિ
માટે ટિપ્પણ આપવામાં આવ્યું છે. એવી જાતનાં ૬, ૭, અને
૨૭ સિદ્ધાંત ઉપરનાં ટિપ્પણથી શિક્ષકને શિષ્યવવાના કામમાં
ધણી સહાયતા મળશે એમ ધારવામાં આવે છે.

૧૮૦ આ ૬.

અમદાવાદ,

જુલાઈ ૧૮૮૮.

યુક્તિહાસની

ભૂમિતિનાં મૂલતત્ત્વો.

સ્કંધ પહેલો.

કોઈપણ પારિભાષિક શબ્દનો અર્થ જે વાક્યમાં કહેલો હોય તે વાક્યને તે શબ્દની વ્યાખ્યા સમજવી.

વ્યાખ્યાઓ (૧-૪).

૧. બિંદુ તેને કહેવું કે જેને સ્થિતિ છે, પણ જેને કાંઈ મહત્ત્વ નથી. (એટલે જેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.)

૨. લીટી તેને કહેવી કે જેન લંબાઈ છે, પણ પહોળાઈ નથી.

૩. ઉપલી બે વ્યાખ્યાઓ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે લીટીના છેડાઓ તે બિંદુ હોવા જોઈએ; અને બે લીટીઓ એકેકને કાપે ત્યાં એક બિંદુ હોવું જોઈએ.

૪. સીધી લીટી તેને કહેવી કે જે તેના બે છેડાઓ વચ્ચે સમાન રહેલી હોય.

આ વ્યાખ્યાઓ વિશે થોડી સમજ આપવી જરૂરની છે.

(૧). આપણે સાધારણ રીતે એક બિંદુનો વિચાર તો એક અનુસ્વારનો, જેમકે 'બિંદુ' શબ્દમાં 'બિ' ને માથે હોય છે તેનો, કરીએ છીએ; પણ ૧ વ્યાખ્યા પ્રમાણે તો ગણિતવિદ્યાનું એ

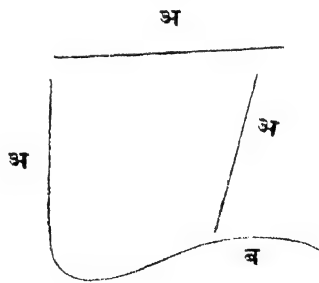
ખિંદુ કહેવાઈ શકે નહિ. કારણુ એ ખિંદુ ગમે એવું ઝીણું હોય તોપણ એને કાંઈ પણ મહત્ત્વ તો હોવું જોઈએજ. જે આપણે એક સૂક્ષ્મદર્શક યંત્ર વડે એને જોઈશું તો એ મોટું દેખાશે; અને જે ઘણાંજ સૂક્ષ્મ અને ખારીક હથિયારો આપણી પાસે હોય તો એવાં ખિંદુના તો ભાગ કરી શકીએ; આ ઉપરથી તો આપણે જોઈએ છીએ કે એને મહત્ત્વ તો છે, જે ન હત તો ભાગ થઈ શકત નહિ. ત્યારે સવાલ કે એ વ્યાખ્યા પ્રમાણેનું ખિંદુ કેવું હશે? એનો જવાબ આપવો કઠણ છે; પણ ધારો કે એ નહાના ખિંદુનો એક ઘણાજ નહાનો ભાગ લઈએ; પછી તે ભાગનો વળી એક ઘણાજ નહાનો ભાગ લઈએ; પછી તેનો નહાનો ભાગ લઈએ; એમ કરતાં એટલે સુધી ભાગ લેતા જઈએ કે છેલ્લે અનન્ત ઘટારો કરવાથી જે રહે તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ. આ જે છેલ્લે અવિભાજ્ય ખિંદુ રહ્યું તેનું નામ ભૂમિતિનું ખિંદુ. એ ખિંદુ તો કલ્પનાનું છે. કાંઈપણ નિશાની મૂકી તો તેને તુરતજ મહત્ત્વ લાગુ પડ્યું. માટે એ ખિંદુ ખરેખર કહેતાં તો દર્શાવાઈ શકાયજ નહિ. પણ આટલા ઉપરથી વિદ્યાર્થીએ યંચવાઈને એમ ન ધારવું કે ભૂમિતિમાં તો ફક્ત કલ્પનાના વિચારો છે. વ્યાખ્યાએ તો શુદ્ધ ગણિતવિદ્યાપ્રમાણે આપવી જોઈએ; પણ એ ખિંદુનો પ્રકાર મન ઉપર પાડવા માટે તો એક ઝીણું ટપકું વિચારવુંજ જોઈએ. એટલું યાદ રાખવું કે તે કલ્પત છે, અને તેનો ભાગ થઈ શકે નહિ.

(૨). ખિંદુ વિશે ઉપર પ્રમાણે સમજ આવી તોપછી લીટીનો વ્યાખ્યા પ્રમાણેનો વિચાર મનમાં ઉત્પન્ન સહેલથી થશે. એવાં અગણિત ખિંદુઓ એકેકની જોડાનેડ એકજ દિશામાં આવે તો લીટી થાય; અથવા કલ્પનામાં એવું ધારીએ કે આવું એક ગણિતવિદ્યાનું ખિંદુ અવકાશમાં ચલત પામીને એક સ્થલથી ખીજે સ્થલે ગયું; અને તેના માર્ગ ઉપર આપણે નિશાની કરી

રાખી તો આ માર્ગ તે લીટી થઈ. હવે એ તો સ્પષ્ટ છે કે આવો વિચાર લીટીનો લઈએ તો તેવી લીટીને લંબાઈ માત્ર જ છે; પહોળાઈ નથી. કારણ કે બિંદુને પહોળાઈ નથી, અને તેણે વગર પહોળાઈનું બિંદુ એક સ્થલથી બીજે સ્થલે સીધું ચાલ્યું ગયું તો તે માર્ગને પહોળાઈ તો આવી જ નહિ. આ ગણિતશાસ્ત્ર પ્રમાણે લીટીની વ્યાખ્યા થઈ; અને તેનો વિચાર પણ ઉત્પન્ન થઈ શક્યો. પણ આવી લીટી આપણે જોઈ શકતા નથી; અથવા દોરી પણ શકતા નથી. એવી લીટી પ્રત્યક્ષ જણાઈ શકતી નથી; કારણ કે ગમે તેવી કીણી લીટી દોરીએ તેને કાંઈ પણ જડાઈ તો હોય જ. પણ જેમ એક બિંદુ દર્શાવવા માટે ટાંપ મૂકીએ તો ચાલે તેમ કલ્પિત લીટીને માટે એક પાતલી લીટી દોરીએ તો ચાલે.

(૩). આવી બે લીટીઓ એકેકને છેદે તો જે જગ્યાએ છેદે ત્યાં બિંદુ હોયું જોઈએ, એ તો સ્પષ્ટ છે; અને ઉપર કહ્યું તેમ લીટી જો બિંદુના વેગથી થતી હોય તો લીટીને બન્ને છેડે એટલે આરંભ અને અંતે બે બિંદુઓ જ હોવાં જોઈએ. જે બે આપેલાં બિંદુઓ વચ્ચે એક લીટી દોરિએ તો તે સમયાંદ કહેવાય. પણ જો તેમ કરતાં એક અથવા બન્ને બાજુએથી તે લીટી ગમે તેટલી લંબાવી શકાય તો તેને અસમયાંદ લીટી કહે છે.

(૪). લીટી બે પ્ર-
કારની હોઈ શકે; સી-
ધી લીટી જેમકે અ;
અને વક્ર લીટી અ-
થવા આડી લીટી
જેમકે બ. અ લીટી
તેના બે છેડાઓ વ-
ચ્ચે સમાન રહેલી છે;
એટલે જો એક છેડે



આખા અડકાડીને તે લીટીની દિશાએ જોઈશું તો તે છેડેનું

એક બિંદુજ દેખાશે, ખીજાં તે લીટીનાં બિંદુઓ દેખાશે નહિ. પણ બ લીટી એવી નથી.

ટીપ્પણી:—વિદ્યાર્થીએ એવી ભુલ કરવાનો સંભવ છે કે, એક કાગળ લખતાં કોઈ સીધી લીટીઓ લખી શકેછે, અને કોઈ વધારે કે ઓછી આડી લીટીઓ લખેછે, તેમ અહિંયા પણ સીધી અને આડી લીટી વચ્ચે તફાવત હશે; પણ તેમ નથી, એ ખુબ ધ્યાનમાં રાખવું.

ઉપલી આકૃતિઓ ઉપરથી જાણારો કે અ વાળી બધી લીટીઓ સીધી છે; માત્ર બ આડી અથવા વક્ર છે.

“બે બિંદુઓની વચ્ચે જે ટુંકાંમાં ટુંકું અન્તર તે સીધી લીટી” એવી કોઈ વાર સીધી લીટીની વ્યાખ્યા લખાયછે; તે પણ ખરી વ્યાખ્યા છે એવું જાણારો.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે જો બે અમર્યાદ સીધી લીટીઓ અવકાશમાં એવી રીતે મળે કે બન્નેની દિશા એકજ હોય, તો પછી તે બેમાંની કોઈપણ લીટી તે દિશા છોડીને નિરાળી દિશાએ જઈ શકશે નહિ; કારણ કે જો તેમ થાય તો સીધી લીટીની વ્યાખ્યાથી ઉલટું થાય.

અ• ————— કં• ————— • બ

આ આકૃતિમાં અ અને બ સીધી લીટીઓ ક બિંદુમાં એવી રીતે મળેછે કે તેમની દિશા સરખીજ છે તો તે બે મળીને એકજ લીટી થશે. હવે પછી એ બેમાંની એક લીટી ખીજીથી જૂદી પડનાર નથી. એમ પણ સિદ્ધ થઈ શકે કે જો બે સીધી લીટીઓમાં બે બિંદુ સાધારણ હોય તો તે બે સીધી લીટીઓ એકેકની ઉપરજ પડશે.

બે સીધી લીટીઓ એકેકને મળી ન જાય તો એકજ બિંદુમાં

પુસ્તિકાની ભૂમિતિનાં મૂલતત્ત્વો.

એકેકને છદ્ધરો; એકથી વધારે બિંદુમાં છદ્ધી રોકે નહિ તે પણ દેખીતું જ છે.

બ્યાખ્યા (૫—૭).

૫. જેને લંબાઈ અને પહોળાઈ જ માત્ર હોય તેને સફાઈ કહે છે.

૬. સફાઈના છેડાઓ લીટીઓથી થયેલા હોય છે.

૭. સવાદ સફાઈ તેને કહેવી કે જે તેના છેડાઓની વચ્ચે સમાન રહેલી હોય; અથવા જેમાં કોઈ પણ બે બિંદુઓ લઈને એક બિંદુથી બીજા સૂધી એક સીધી લીટી દોરિયે તો તે સીધી લીટી તે સફાઈની અંદર જ પડે અને બહાર જાય નહિ.

(૫). જેમ બિંદુના ચલનથી લીટીની કલ્પનાનો નિશ્ચય થાય છે, તેમ લીટીના ચલનથી સફાઈની કલ્પના મળી શકે છે. જે એક ગણિતવિદ્યાની રેખા ચલન પામે એમ ધારિયે અને જે અવકાશમાં તે ચલન પામે છે તેમાં કાંઈ નિશાની પડે, તો તે નિશાની એક સફાઈ દર્શાવશે. એ તો દેખીતું જ છે કે જ્યારે લીટીને ક્રમ લંબાઈ જ હોય છે અને જડાઈ કે પહોળાઈ હોતી નથી ત્યારે લીટીના ચલનથી જે સફાઈ ઉત્પન્ન થઈ તેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ જ હોઈ શકે; પણ તેને જડાઈ હોઈ શકે નહિ.

ધારો કે એક સીધી લીટી અથવા દોરી ચુનામાં અથવા ચાકમાં પલાળીને એક ટેબલના સપાટ મથાળાં ઉપર તેના બન્ને છેડા ખેંચી રાખીને ફેરવિયે; તો તે ટેબલના ઉપર સફેદ રંગની આકૃતિ પડશે; એ એક સફાઈ થઈ; એને લંબાઈ પહોળાઈ છે; પણ જડાઈ નથી.

(૬). વળી એ દોરી ગમે તેમ પકડીને ગમે તે પ્રકારની આકૃતિ પાડી હોય તો પણ તે આકૃતિને છોડે તો લીટીજ બનવાની.

(૭). જો એક સપાટ ટેબલના મથાળાં ઉપર ન ફેરવતાં એવી દોરી એક પૃથ્વીના ગોળા ઉપર ફેરવી હોય તો પણ એક મશાઈની આકૃતિ આવશે; પણ તે કાંઈ સપાટ સફાઈ થશે નહિ; ટેબલ ઉપર બનાવેલી સફાઈમાં તો એ બિંદુઓ જોડી શું તો તે જોડનારી લીટી ટેબલ ઉપરજ રહેશે; પણ આ ગોળા ઉપરની સફાઈમાં તો એવાં એ બિંદુઓ એક લીટીથી જોડી શું તો તે લીટી ગોળાની અંદરથી પડશે, અને ગોળાની સફાઈ ઉપર પડશે નહિ. આ ઉપરથી સફાઈ અને સપાટ સફાઈ વચ્ચેનો ફેર સમજ પડશે. જો સફાઈ સપાટ ન હોય તેને **વક્ર સફાઈ** કહેછે.

ટીપ્પણી:—કોઈપણ નક્કર પદાર્થ લઈએ તો તેના મહત્ત્વના ત્રણ પરિણામ અથવા પ્રકાર હોયછે; (૧) લંબાઈ, (૨) પહોળાઈ, (૩) ઉંચાઈ અથવા જડાઈ. ધારો કે એક ચોપડી લીધી, તો તેને એ ત્રણ પરિણામ લાગુ પડશે. હવે એ ચોપડીને ટેબલ ઉપર મૂકીને તેનું ઉપરનું સપાટ મથાળું જોઈએ તો તેની કુદત લંબાઈ અને પહોળાઈ જ દેખાશે; માટે તે **સફાઈ** કહેવાય; પણ એમ નહિ સમજવું કે તે ચોપડીનું પુંડું ફાડી લીધું તો તે **સફાઈ** થશે; કારણ કે તેને જરા પણ જડાઈ હશેજ; એટલે તે તો નક્કર પદાર્થ થયો. પણ જડાઈ ન વિચારતાં કુદત પુંડાના ઉપલા ભાગની આકૃતિના જ કલ્પનામાં વિચાર કરીએ તો તે **સફાઈ**. એજ સફાઈને છોડે ચાર લીટીઓ આવી, તે લીટીઓનો પણ કલ્પનાથી એવો વિચાર કરવો કે તેને લંબાઈ જ છે; પણ જડાઈ અથવા પહોળાઈ નથી તો તે ગણિતની લીટી થઈ; અને જો ખૂણે લીટીઓ મળેછે તે બિંદુઓ થયાં.

આ ઉપરથી જણાશે કે,

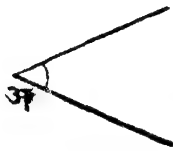
૧. નક્કર પદાર્થ દેખીતા છે અને તેને લંબાઈ, પહોળાઈ તથા જડાઈ ત્રણે હોયછે.

૨. સફાઈ કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને લંબાઈ તથા પહોળાઈ બેજ હોયછે; જડાઈહોતી નથી.

૩. લીટી કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને એકલી લંબાઈ જ હોયછે.

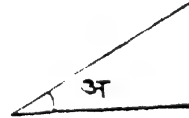
૪. બિંદુ કલ્પનાથી વિચારાયછે; અને તેને કોઈ પણ જાતનું મહત્ત્વ હોતું નથી.

વ્યાખ્યા (૮-૯).



૮. બે લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય પણ એકજ દિશામાં ન હોય તો એવી બે લીટીઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોંકને સમતલ રૂપો કહેછે.

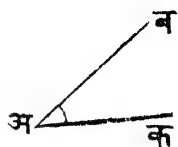
૯. જો બે સીધી લીટીઓ એકેક સાથે એકજ સફાઈમાં મળે, પણ એકજ દિશામાં જોડાઈ જતી નહોય, તો તેઓની પરસ્પરની વક્રતા એટલે ઝોંકને સમતલ સીધી લીટી રૂપો કહેવો.



૮ મી વ્યાખ્યામાં કહેલો ખૂણો આ ભૂમિતિમાં વપરાતો નથી; અને ૯ મી વ્યાખ્યા પ્રમાણે સીધી લીટીઓથી થયેલો ખૂણોજ વપરાયછે, માટે ઘણું કરીને એને માત્ર “ખૂણા” કરીનેજ

કહેવામાં આવેછે; અને “ ખૂણા ” શબ્દ લખ્યો હોય ત્યારે હવેથી “ સમતલ સીધી લીટી ખૂણા ” સમજવો.

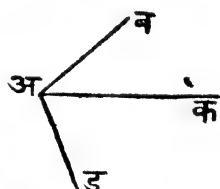
જે બે લીટીઓ મળવાથી એક ખૂણા થાય તે લીટીઓને તે ખૂણાની બાજુઓ કહેવી; જેમકે અ ખૂણા છે; તેની અક અને અબ બાજુઓ છે. એમના દેખીતુંજ છે કે



એ બાજુઓ આ આકૃતિમાં છે તે કરતાં ગમે એટલી વધારે લાંબી અથવા ટુંકી દોરી હોય તો ખૂણાના કદમાં કંઈ ફેર પડનાર નથી; માટે યાદ રાખવું કે લીટીઓ જ્ઞાની મોટી હોય તે ઉપર ખૂણાના પરિમિતનો આધાર નથી.

જે બિંદુએ અને બાજુઓ મળેછે તેને ખૂણાનું શિરોબિંદુ

કહેછે, અને કોઈકોઈ વાર તે બિંદુના નામથીજ ખૂણા દેખાડાયછે; જેમકે અ ખૂણા; પણ જો અ આગળ બેથી વધારે લીટીઓ મળે તો તે એકથી વધારે ખૂણા થાય; જેમકે આ આકૃતિમાં અ



બિંદુ આગળ ત્રણ ખૂણા થયલાછે; (૧) અબ અને અડ લીટીઓ વચ્ચે; (૨) અબ અને અક લીટીઓ વચ્ચે; અને (૩) અક અને અડ લીટીઓ વચ્ચે; એમાંના પહેલા ખૂણા પીળા બેના સરવાળા બરાબર છે. હવે એ બધાને તો અ ખૂણા કરીને કહેવાયજ નહિ; કારણ કે ત્રણ જૂદા જૂદા પરિમિતના છે, અને જૂદી જૂદી લીટીઓથી થયલા છે; માટે ખૂણાઓ દેખાડવા સાર એવી ગોઠવણ કરી છે કે જે ખૂણાઓ વચ્ચે ગુંચવણ પડે નહિ. તે એ કે દરેક ખૂણા એક અક્ષરથી નહિ પણ ત્રણ અક્ષરથી દેખાડવો; તેમાં શિરોબિંદુનો અક્ષર વચમાં મુકવો; અને આસપાસ બે બાજુઓ ઉપર લખેલા અક્ષરો મુકવા; જેમકે:—

- (૧) અવ અને અડ વચ્ચેનો ખૂણો તે વઅડ અથવા ડઅવ.
 (૨) અવ અને અક વચ્ચેનો ખૂણો તે વઅક અથવા કઅવ.
 (૩) અક અને અડ વચ્ચેનો ખૂણો તે કઅડ અથવા ડઅક.
 બે સીધી લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય ને તેઓને લંબા-
 વતાં તેઓ મળે તો:—

(૧) જો તેઓની દિશા એકજ હોય તો મળ્યા પછી બે
 મળીને એકજ લીટી થશે; પણ:—

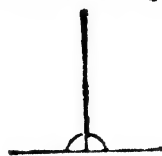
(૨) જો તેઓની દિશાઓ જુદી હોય તો જો બિંદુ આ-
 ગળ મળે ત્યાં એકેકને છેદશે. એક વખત છેદ્યા પછી
 ફરીથી તો છેદશે નહિજ, એ તો પ્રત્યક્ષ છે. હવે જ્યાં છેદે-
 છે ત્યાં તે બે લીટીઓ વચ્ચેની વક્રતા અથવા તેઓની
 વચ્ચેનો ઝાંક અથવા ગાળો તેને ખૂણો કહેછે. આ ઉપરથી
 જણાશે કે બે સીધી લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોય પણ દૂર
 દૂર હોય તો તેમને લંબાવ્યા પછી એકેકને મળશે ત્યાં જો
 ખૂણો થાય તે તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો સમજવો.

એવી બે લીટીઓ વચ્ચેનો ગાળો મોટો નહાનો હોય તેમ
 ખૂણો પણ મોટો નહાનો થશે; અને ખૂણાના કદનો આધાર તે
 ઉપરજ રહેશે. આજુઓ ગમે એટલી લાંબી હોય પણ પાસે
 પાસે હોય તો તેમની વચ્ચેનો ખૂણો નહાનો થશે; પણ આજુઓ
 ગમે એટલી નહાની હોય, પણ તેમની વચ્ચેનો ગાળો મોટો
 હોય, એટલે તે આજુઓ દૂર દૂર હોય, તો તેમની વચ્ચેનો
 ખૂણો મોટો થશે.

બ્યાખ્યા (૧૦-૧૨).

૧૦. જ્યારે એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટીને

એવી રીતે મળે કે પાસ પાસેના એ ખૂણા-
ઓ અરોઅર થાય, ત્યારે
આ ખૂણાઓ માંહેલા
પ્રત્યેકને કાટખૂણો કહે-
છે; અને આ લીટીઓ
માંહેલી પ્રત્યેક બીજી ઉપર લંબ છે એમ
કહેવાયછે.



૧૧. જે ખૂણો કાટખૂણા કરતાં
મોટો તે પહોઠો ટૂણો.



૧૨. જે ખૂણો કાટખૂણા કરતાં
નહાનો તે સાંકડો ટૂણો.



કોઈ ખૂણો નહાનો હોય અને કોઈ મોટો હોય, એટલે ખૂ-
ણાના પરિમિતમાં ભાગો છે, એ તો દેખીતું છે; હવે વિચારવાનું
એ રહ્યું કે એક ખૂણો કેટલો મોટો છે તે શી રીતે બતાવાય ?
એક લીટી કેટલી નહાના કે મોટી છે તે તેમાં કેટલાં તસુ અથ-
વા ફૂટ અથવા ગજ છે તે કહ્યાથી સમજશે; એક ચોપડી કેટ-
લી ભારે છે તે કેટલા તોલા અથવા શેર છે તે કહ્યાથી સમજશે.
હવે ખૂણાનું પરિમિત જાણવા સારૂ આપણે શું પરિમાણ લેવું
જોઈએ ? જો એક એવો ખૂણો હોય કે તેનું પરિમિત હમેશાં
નિશ્ચિત અને એક જ સરખું રહેતું હોય અને બદલાતું નહોય
(જમકે લંબાઈમાં એક ફૂટ, વજનમાં એક શેર) તો તેને
અમુક નામ આપિયે; ને પછી બીજા બધા ખૂણાઓનાં
તે ખૂણા ઉપરથી પરિમિત કહાડીયે; એવો એક ખૂણો સહે-

જમાં ધ્યાનમાં આવશે, તમારા ઝંખારડાની એ પાસપાસેની ઉભી દીવાલો વચ્ચેનો ખૂણો; તમારી ચોપડીની અથવા આ પૃષ્ઠની લંબાઈ અને પહોળાઈની વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને જમીન વચ્ચેનો ખૂણો; ભીંત અને ‘સીલીંગ’ (છત) વચ્ચેનો ખૂણો; સુથાર અથવા કુડિયો લાકડાંની એ ચીપોથી બનાવેલો ખૂણો વાપરેછે તે; એ બધા ખૂણા એકજ પરિમિતના છે, એ તો સહેજ જણાશે. જો તમને એ વિશે શક હોય તો સ્લેટનો એ ચોકઠાં વચ્ચેનો ખૂણો ઝંખારડાની એ ભીંતો વચ્ચેના ખૂણા જોડે જોવા; તો તમને જણાશે કે એ બન્ને ખૂણાઓ સ્થાનોપરી છે; એટલે એકેક ચોકઠું એકેક ભીંતની સાથે વળગી જશે; માટે ભીંતો અને ચોકઠાં વચ્ચેના (ગાળા) ખૂણા પણ સરખા જ હોવા જોઈએ. આવો નિશ્ચિત ખૂણો તે કાટખૂણો; એવા એક કાટ-ખૂણાના ૯૦ સરખા ભાગ કરિયે તો દરેક ભાગને એક અંશ કહેછે. જે વ્યાખ્યા ઉપર

આપી છે તે આ પાસેની આકૃતિઓ જોતાં ખરી અને વાસ્તવિક છે એવું

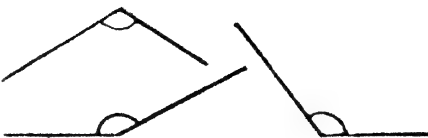


જણાશે. આ આકૃતિમાં બન્ને ખૂણા બરાબર છે અને દરેક ખૂણો દેખીતોજ કાટખૂણો છે; જ આકૃતિમાં ખૂણા નહાના મોટા છે; અને તેમાંના એકે કાટખૂણો નથી; દેખીતી રીતે એક કાટખૂણો કરતાં નહાનો, અને ખીન્ન મોટો છે.

(૧) કાટખૂણો હંમેશાં એકજ નિશ્ચિત પરિમિતનો છે; માટે તેના એક સરખા ૯૦ ભાગ કીધાછે; એટલે દરેક કાટખૂણામાં ૯૦ અંશ હોવા જોઈએ.



(૨) પહેળિાખૂ-
ણા કાઠખૂણા કરતાં
મોટા છે, માટે તેમાં
૯૦ થી વધારે અને
૧૮૦ થી ઓછા અંશ
હોવા જોઈએ.



(૩) સાંકડા ખૂણા કા-
ઠખૂણા કરતાં નહોતા છે,
માટે તેમાં ૦ થી વધારે
અને ૯૦ થી ઓછા અંશ હોવા જોઈએ.



ટીપ્પણી:—(૧)જે ખૂણા કાઠખૂણા નહોત તેને (અંક) પહેળા
અને સાંકડા બન્ને ખૂણાને) તિર્યકોણ કહેવા જોઈએ:—

કઞ્ઞ અને કઞ્ઞ એ બન્ને કાઠખૂણા છે;
કઞ્ઞ, કઞ્ઞ એ બન્ને (સાંકડા) તિર્યકોણ
છે; કઞ્ઞ એ પણ (પહેળા) તિર્યકોણ છે.



(૨) જે કાઠખૂણા, અંક ૧૮૦ અંશ, ૬૦ અંશ વધારે પણ ખૂણા થઈ શકે; પણ એવા ખૂણા યુક્તિ-
ના અન્યમાં વાપરવામાં આવ્યા નથી.

વ્યાખ્યા (૧૩—૧૪).

૧૩. કોઈ વસ્તુનો છેડો તે તેની સીમા અથવા મર્યાદા.

૧૪. જે સફાર્ધની એક અથવા વધારે લીટીઓથી
હદ થઈ ગઈ હોય તે સફાર્ધને આકૃતિ કહે છે.

વ્યાખ્યા ૧૩ મી
ઘણી ઉપયોગી નથી.

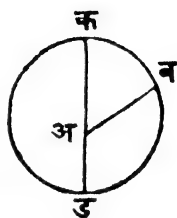
જે સફાર્ધ અ-
નન્ત ન હોય તે આકૃતિ થઈ.



એક આકૃતિને હદ કરનારી બધી લીટીઓની લંબાઈનો સરવાળો લઘ્યે તો તેને પરિમિતિ કહેછે.

વ્યાખ્યા (૧૫-૧૯).

૧૫. એક સપાટ આકૃતિ જેની હદ એકજ આખંડ વક્ર લીટી થયલી હોય અને જેમાં એક એવું ચુકરર બિંદુ હોય કે તે બિંદુમાંથી તે વક્રલીટી સૂધી જે સધળી



સીધી લીટીઓ દોરિયે, તે બરોબર થાય તો તે આકૃતિને એક વર્તુલ કહેવો; અને તે વક્ર લીટીને પરિઘ કહેવો.

૧૬. જે બિંદુમાંથી આવી સરખી સીધી લીટીઓ દોરાયછે તેને તે વર્તુલનું મધ્યબિંદુ કહેછે.
૧૭. જે સીધી લીટી એક વર્તુલમાં તેના મધ્ય બિંદુમાં થઈને પાર જાય, અને જેના બે છેડાઓ પરિઘ ઉપરજ આવી મળે, તેને તે વર્તુલનો વ્યાસ કહેછે.
૧૮. વ્યાસ અને તેનાથી કપાયલા પરિઘના ભાગ વચ્ચે વર્તુલનો જેટલો ભાગ આવે તેને અર્ધ-વર્તુલ કહેછે.
૧૯. હરકોઈ સીધી લીટી વર્તુલમાં દોરી હોય તો તે સીધી લીટી અને કપાયલા પરિઘ વચ્ચેના ભાગને વર્તુલનો ક્ષંડ કહેછે.

ટીપ્પણી:—મધ્ય બિંદુમાંથી જે સરખી સીધી લીટીઓ દોરી, તેને ત્રિજ્યા કહેછે.

(૧) એકજ વર્તુલની બધી ત્રિજ્યાઓ સરખી હોવી જોઈએ.

(૨) એકજ વર્તુલની ત્રિજ્યા તેના વ્યાસની અરધી હોવી જોઈએ.

(૩) એકજ વર્તુલના બધા વ્યાસો સરખા હોવા જોઈએ.

(૪) એક વ્યાસથી વર્તુલના એ સરખા ભાગ થઈ જાય છે; કારણ કે એવા એ ભાગ એકેક ઉપર ગોઠવીને મુકીશું તો સ્થાનો-પરી થશે; એટલે સરખોજ જગ્યા રોકશે; માટે દરેકને અર્ધ-વર્તુલ કહેછે.

વર્તુલની વ્યાખ્યા ઉપરથી વર્તુલ કેમ દોરવો તેની સમજ પડશે. એક દોરી લઈને તેનો એક છેડો પાટીયાં ઉપર આગળથી દબાવી રાખવો; પછી તે દોરી એસીને તેને ખીલે છેડે ચાકનો કટકો જોરમાં પકડી રાખવો; હવે જો પહેલો છેડો અચલ રાખીને એટલે દાખી રાખીને ચાકવાળો છેડો ફેરવીશું તો વર્તુલની આકૃતિ આવશે. એમાં દાખેલા છેડો તે મધ્ય બિંદુ, દોરીની લંબાઈ ત્રિજ્યા, અને ચાકની ગોળ લીટી તે પરિધ, અને એ લીટી વચ્ચે આવેલા પાટીયાંનો કાળો ભાગ તે વર્તુલ થયાં. (યાદ રાખવું કે પરિધ અને વર્તુલ જુદાં છે; પરિધ તો માત્ર એક લીટી; અને વર્તુલ તો લીટીથી મર્યાદા થયેલી સફાઈ; ચાકની નિશાની તે પરિધ; અને પાટીયાંનો ભાગ તે વર્તુલ). ઉપલી આકૃતિમાં અ મધ્યબિંદુ છે; અબ, બક, અને અડ ત્રિજ્યાઓ, અને કડ વ્યાસ છે; ચકડ લીટી પરિધ; અને તેની અંદરની સફાઈ તે વર્તુલ.

વ્યાખ્યા (૨૦—૨૩).

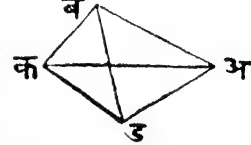
૨૦. જે આકૃતિની હદ માત્ર સીધી લીટીઓથી

થયલી હોયછે તેને સીધીલીટીઆકૃતિ કહેછે.

૨૧. જે સીધીલીટીઆકૃતિની હદ ત્રણ સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને ત્રિકોણ કહેછે.



૨૨. જેની હદ ચાર સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને ચતુર્કોણ કહેછે. ચતુર્કોણાકૃતિના



સામસામેના ખૂણાઓનાં શિરોબિંદુઓને સાંધનારી સીધી લીટીઓ (અક અને બક) ને તેની કર્ણ લીટીઓ કહેછે.

૨૩. જેની હદ ચારથી વધારે સીધી લીટીઓથી થઈ હોય તેને બહુકોણ કહેછે.



જે સીધી લીટીઓથી એક સીધીલીટીઆકૃતિ થઈ હોય તે દરેક લીટીને તે આકૃતિની બાજુ કહેછે. યાદ રાખવું કે એવી એક આકૃતિને જેટલી બાજુઓ હોય તેટલાજ ખૂણા પણ હોવા જોઈએ.

ત્રણ કરતાં ઓછી સીધી લીટીઓથી કોઈ પણ આકૃતિ બની શકતી નથી; માટે બધી આકૃતિઓમાં ત્રિકોણ પહેલા અને બધાંનું મૂળ સમજવું. વળી કોઈપણ આકૃતિના ત્રિકોણ તુરત બની શકેછે; જેમકે ૨૨ માં વ્યાખ્યાની આકૃતિમાં એક ચતુર્કોણાકૃતિના બે ત્રિકોણો અથવા અને અથવા થયા; માટે ત્રિકોણના ગુણો વિશે સારું જ્ઞાન મળે તો તે ઉપરથી બીજી આકૃતિઓના ગુણોની સમજણ સારી મળે; પહેલા સંઘના ધણા ખરા ભાગમાં ત્રિકોણના ગુણો વિશેજ વિચાર કરીએ છે.

પાંચ બાજુના બહુકોણને પંચકોણ, છનાને ષટ્કોણ, સાતનાને સપ્તકોણ, આઠનાને અષ્ટકોણ કહેછે.

આખ્યા (૨૪—૨૯).

૨૪. જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ
સરખી હોય તેને સમબાજુ
ત્રિકોણ કહે છે.



૨૫. જે ત્રિકોણની માત્ર બે બાજુઓ
સરખી હોય તેને સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ કહે છે.



૨૬. જેની કોઈપણ બે બાજુઓ
સરખી ન હોય તેને વિષમ-
બાજુ ત્રિકોણ કહે છે.



૨૭. જે ત્રિકોણમાં એક કાટખૂણો
હોય તેને કાટચૂળ ત્રિકોણ
કહેવો.



૨૮. જેમાં એક પહોળો ખૂણો
હોય તેને પહોળચૂળ ત્રિકોણ
કહેવો.



૨૯. જે ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા
સાંકડા હોય તેને સાંકડ-
ચૂળ ત્રિકોણ કહેવો.



ઉપલી છ વ્યાખ્યાઓમાંથી પહેલી ત્રણ ત્રિકોણની બાજુઓ
સરખાવતાં થઈ છે; અને છેલ્લી ત્રણ ત્રિકોણના ખૂણાઓ
સરખાવતાં થઈ છે.

જેમ જે ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ સરખી હોય તેને સમ-
બાજુ કહે છે, તેમજ જેના ત્રણ ખૂણા સરખા હોય તેને સમ-
ખૂણ કહે છે. આગળ ચાલતાં જણાશે કે જે ત્રિકોણની ત્રણ

બાજુઓ સરખી હોય તેના ત્રણ ખૂણા પણ સરખા હોવાજ નોઈએ.

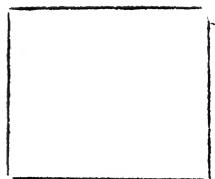
દેખીતું છે કે (૨૫) માં વ્યાખ્યામાં કહેલા ત્રિકોણના સઘળા ગુણો (૨૪) માં વ્યાખ્યાવાળા ત્રિકોણને લાગુ પડવાજ નોઈ-એ આગળ ચાલતાં જણાશે કે એક ત્રિકોણમાં કાટખૂણો એકજ હોઈ શકે અને પહોળા ખૂણો પણ એકજ હોઈ શકે. જો એ કાટખૂણા અથવા પહોળા ખૂણા આવે એવો એક ત્રિકોણ દોરવા ચત્ન કરશો તો તેમ દોરારો નહિ.

યાદ રાખવું કે એક અથવા એ સાંકડા ખૂણા કોઈ ત્રિકોણમાં હોય તો તેને સાંકડા ખૂણા ત્રિકોણ કહેવાય નહિ. કારણ કે કાટખૂણા અને પહોળાખૂણા ત્રિકોણમાં પણ એ ખૂણા તો સાંકડાજ આવેછે. માટે જે ત્રિકોણના ત્રણે ખૂણા સાંકડા તેજ સાંકડા-ખૂણા ત્રિકોણ.

જો એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ પાતપાતામાં સરખી ન હોય, પણ એકની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે ખીજની ત્રણ બાજુની બરાબર હોય તો તે એ ત્રિકોણ અસ્પરસ સમ-બાજુ છે એમ કહેવું.

વ્યાખ્યા. (૩૦-૩૪).

૩૦. ચતુર્કોણાકૃતિઓમાં જેની ચારે બાજુઓ સરખી હોય અને બધા ખૂણાઓ કાટખૂણા હોય તેને ચોરસ કહેછે.



૩૧. જે ચતુર્કોણાકૃતિના બધા ખૂણા કાટખૂણા

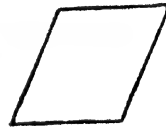
હોય પણ બધી બાજુઓ
સરખી ન હોય તેને કાટખૂણ
ચતુર્કોણ કહેવો.



૩૨. જે ચતુર્કોણાકૃતિની બધી બાજુઓ સરખી
હોય પણ તેના ખૂણા
કાટખૂણા ન હોય તેને
સમબાજુ ચતુર્કોણ કહેવો.



૩૩. જે ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બંને બાજુ-
ઓ સરખી હોય, પણ જેની ચારે બા-
જુઓ સરખી ન હોય
અને જેના ખૂણાઓ
પણ કાટખૂણા ન હોય
તેને રામ્બાઈડ કહે છે.



૩૪. ખીછ બધી ચતુર્કોણાકૃતિ.
ઓને વિષમબાજુ ચતુ-
ર્કોણો કહેવા.



ચોરસની વ્યાખ્યામાં એટલું જ કહિયે તો પણ ચાલે, કે તેની
ચારે બાજુઓ સરખી હોવી જોઈએ, અને એક ખૂણો
કાટખૂણો હોવો જોઈએ; કારણકે આગળ ચાલતાં જણારો કે
ચારે બાજુઓ સરખી હોય અને એક ખૂણો કાટખૂણો હોય
તો ખીજ બધા પણ કાટખૂણા જ હોવા જોઈએ.

કાટખૂણ ચતુર્કોણના નામ ઉપરથી જ જણારો કે તેમાં બધા
ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ; પણ બાજુઓ અવશ્ય સર-
ખી જ હોવી જરૂરની નથી.

તે જ પ્રમાણે સમબાજુ ચતુર્કોણના અર્થ જ એ છે કે તે

ચતુર્કોણની ચારે બાજુઓ સરખી છે; પણ તેના ખૂણા બધા સરખા અથવા કાટખૂણા હોવાની જરૂર નથી.

રાખ્યાઈડ રાખ્દ ઇંગ્રેજ ઉપરથીજ લીધા છે; કારણ કે કુત્ર સામસામેની બેજ બાજુઓ સરખી હોય એવી ચતુર્કોણાકૃતિને માટે એક રાખ્દ આપણી બાષામાં સહેલથી થઈ શકતો નથી. પણ એ આકૃતિ “સમાન્તરબાજુ ચતુર્કોણ” જેની વ્યાખ્યા આગળ આપી છે, તેજ આકૃતિ છે; અને આગળ ચાલતાં સિદ્ધ થશે કે તે એ એકજ આકૃતિનાં નામો છે; માટે એ ઇંગ્રેજ રાખ્દની જગ્યાએ તે રાખ્દ બધે વાપરવામાં આવશે.

બ્યાખ્યા (૩૫-૩૬).

૩૫. જો એકજ સફાઈમાં બે સીધી લીટીઓ એવી હોય કે તેઓને બન્ને _____ દિશાએ ગમે તેટલી વધારિયે તો પણ કદી મળે _____ નહિ, તો તેને સમાન્તર સીધી લીટીઓ કહેવી.

૩૬. જો ચતુર્કોણાકૃતિની સામસામેની બંને બાજુઓ સમાન્તર હોય તેને સમાન્તરબાજુ ચતુર્કોણ કહેવો.



સમાન્તર લીટીઓ એકજ સફાઈમાં હોવી જોઈએ; કારણ કે બે જુદી સફાઈમાં તો બે લીટીઓ એવી હોઈ શકે કે તે એક-કને મળેજ નહીં; પણ તે કાંઈ સમાન્તર ન કહેવાય. ૩૦-૩૧-૩૨-૩૩ બ્યાખ્યાવાળી આકૃતિઓનો સમાવેશ ૩૬ માં થયેલો છે; એટલે ઉપર કહેલી બધી આકૃતિઓ સમાન્તરબાજુ ચતુર્કોણ છે, એમ સિદ્ધ થશે.

સ્વીકૃત કૃત્યો.

૧. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈ પણ એક બિંદુથી કોઈપણ બીજા બિંદુ સૂધી એક સીધી લીટી દોરી શકાય છે.
૨. એવું સ્વીકારેલું છે, કે અનંતવાન સીધી લીટી ગમે તેટલી લંબાઈ સૂધી એક સીધી લીટીમાં વધારી શકાય છે.
૩. એવું સ્વીકારેલું છે, કે કોઈપણ બિંદુને મધ્ય બિંદુ ધારીને તે મધ્ય બિંદુથી કોઈપણ અનંતરે એક વર્તુલ દોરી શકાય છે.

સમજણ.

આ વિષયની બરોબર સમજણ પહેલાંથીજ લેવી ધણી અગત્યની છે; માટે માત્ર એ ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો મેં ઉપર કરવાથી કામ થયું એમ વિદ્યાર્થીએ જાણવું નહિ; પણ આ સમજણ જરા કઠણ લાગે તોપણ ધ્યાનથી સમજ્યા શિવાય આગળ વધવું નહિ. એ બરોબર સમજ પડવા માટે નીચલા સવાલોનો વિચાર કરવાનો છે.

- (૧) સ્વીકૃત કૃત્યો એટલે શું? અને એમ સ્વીકારવાનું કારણ શું?
- (૨) યુક્તિ કે માત્ર કેટલું સ્વીકારવા માન્યું છે?
- (૩) એ ત્રણ શિવાય કોઈ કૃત્યો સ્વીકારાયલાં છે કે કેમ? એ સવાલોના જવાબ:—

(૧) વિદ્યાર્થીને આગળથી ખબર તો હશેજ કે બે હજારથી વધારે વર્ષો થયાં યુક્તિગત બુદ્ધિનો આગ્રહપૂર્વક અભ્યાસ

એટલામોટ કરવામાં આવેછે કે એજ એકલા શાસ્ત્રમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમોને બરોબર દઢતાથી અનુસરવામાં આવેછે, અને સિદ્ધાંતો એવી રીતે સાબિત કરવામાં આવ્યાછે કે આગલા એકાદ સિદ્ધાંતમાં ન સાબિત કર્યું હોય એવું કોઈપણ સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતું નથી. હવે ત્રણ કૃત્યો એવાં છે કે તે માગી લીધેલાં છે; અને તે જો આપણે ન સ્વીકારીએ તો સિદ્ધાંતોનો પુરાવો આપી શકાય નહિ. એ ત્રણ કૃત્યો તેજ ઉપર લખેલાં ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો છે. એ એટલાં સહેલાં છે કે પુરતજ સ્વીકારી શકાય.

(૨) એ કૃત્યો બરોબર તપાસવાં જોઈએ; અને જોઈવું માગેલું છે તેટલુંજ આપવું; તેથી વધારેની જરૂર નથી. પહેલાંમાં એમ માગેલું છે કે જો બિંદુઓ એકજ સ્કાઇમાં હોય તો એક બિંદુથી ખીજી સૂધી લીટી દોરવાની એટલે કે તે બિંદુઓને એક લીટીથી સાંધવાની છુટ છે; જો અ અને બ અ——————બ જો બિંદુઓ હોય તો જરૂર પડે તેઓની વચ્ચે અ થી બ સૂધી એક લીટી દોરી શકાય, એટલું માગી લીધું છે. ખીજી સ્વીકારાયેલાં કૃત્યમાં એમ કહેલું છે કે જો જરૂર પડે તો એક આપેલી હદ થયેલી અથવા લીટી બેમાંથી ગમેતે — કા ————— કા ————— બાજુએ લંબાવાઈ શકાય. પણ યાદ રાખવું કે આપણે એમ સ્વીકારતા નથી કે આટલી અમુક લંબાઈ સૂધી લંબાવાય; એમ ન કહેવાય કે અથવા લીટીને ચાર ઇંચ લંબાવો; અથવા કોઈ કહી લીટી જોડેલી લંબાવો. એ આપણે સ્વીકારતા નથી; પણ એટલુંજ, કે અથવા લીટી સમયાંદ એટલે બને છે કે હદ થયેલી લીટી છે તેને એક અથવા બે દિશાએ અમર્યાદ કરી શકાય. પહેલાં અને ખીજી સ્વીકૃત કૃત્યો કયા સાધનથી થઈ શકે તે જોવાથી વધારે સમજ પડશે.

એ બને સાધારણ વગર નિશાની કરેલી આંકણીથી થઈ શકે; એક એવી આંકણીથી બે બિંદુ પણ સંધાઈ શકે અને એક લીટી ઉપર આંકણી મુકીને કલમ ચલાવિયે તો બને બાજુએ તે લીટી લંબાવાઈ પણ શકાય. ઉપર “વગર નિશાની કરેલી” એવા રાખેદો વાપરવાનું કારણ એ કે એક નિશાની કરેલો ટુટ અથવા ગજ લઈએ તો લીટી દોરાય અને લંબાવાય એટલુંજ નહિ, પણ અમુક લંબાઈ જોડલી પણ કરી શકાય. પણ તેવું કાંઈ યુક્તિએ પોતાની જામિતિના સિદ્ધાંતોના પુરાવા માટે માગ્યું નથી. ત્રિજામાં એટલુંજ માગી લીધુંછે કે એક આપેલી લીટીના એક છેડાને મધ્યબિંદુ ધારીને અને તે લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને એક વર્તુલ દોરી શકાય. આ આકૃતિ બનાવવા સાર એક કમ્પાસ (કકંટ)ની જરૂર છે. પહેલાં કમ્પાસનું એક અણી મધ્ય બિંદુ ઉપર મુકીને અચલ રાખવું, પછી બીજું અણી આપેલી લીટીને બીજે છેડે મુકીને તે અણી ફેરવવું; તે અણી ફરીને પાછું અસલ જગ્યાએ આવશે કે બરાબર વર્તુલાકૃતિ થઈ રહેશે. યાદ રાખવું કે યુક્તિએ એમ માગ્યું નથી કે ત્રિજ્યા અમુક લંબાઈ (પાંચ ઇંચ, દશ ઇંચ)ની હોવી જોઈએ; પણ એટલુંજ કે એક આપેલી લીટીને ગમે તે એક છેડે મધ્ય બિંદુ માટે લેવો; અને તેજ લીટીની લંબાઈ તે ત્રિજ્યા. યાદ રાખવું કે સાદી આંકણીથી પણ કોઈ અમુક લંબાઈ જોડલી લીટી દોરી શકાય અને સાધારણ કમ્પાસથી પણ કોઈ અમુક ત્રિજ્યાનો વર્તુલ દોરી શકાય, પણ તેવી રીતે એ સાધનો વાપરવાની જરૂર નથી, કારણ કે તેટલું કાંઈ યુક્તિએ પુરાવા માટે માગ્યું નથી.

(૩) જે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકારાયાં છે તે ઉપરાંત બીજાં પણ એક બે એવાં કૃત્યો સ્વીકૃત હોય એમ યુક્તિએ ગણ્યાં છે. તે એણે આ બેગાં લખ્યાં નથી તેના બે કારણો હશે; એક તો એ કે તે

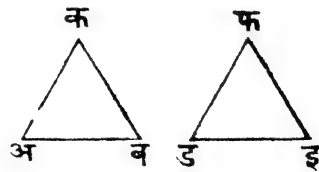
કવચિતજ વારાયછે ; ખીજું એકે તે એકલાં રૂપદ છે, કે તે માગી લેવાની જરૂર જણાઈ નહિ હોય. પણ તેવાં કોઈ ઠેકાણે આવે ત્યારે મુંચવણ પડે નહિ અને વળી તે શું છે તે આગળથી જણાય, માટે તે અડિયાં આપ્યાં છે. તે સમજવાં સહેલ છે.

૧. કોઈપણ સહાઈમાં એક બિંદુ ગમે ત્યાં લેવું હોય તો લઈ શકાય.

૨. એ લીટીએ હોય તો તેમાંની એક લીટી હંચકીને ખીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એક લીટીના એક છેડા ખીજી લીટીના એક છેડા સાથે મળી જાય, અને હંચકેલી લીટી ખીજી લીટીના ઉપર એવી રીતે પડે કે તેને ઢાંકી નાખે.

૩. એક ખૂણા હંચકીને ખીજી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું શિરોબિંદુ ખીજીના શિરોબિંદુ ઉપર પડે અને હંચકેલા ખૂણાની એક બાજુ પડેલા ખૂણાની એક બાજુને ઢાંકી નાખે.

એક આકૃતિને હંચકીને ખીજી ઉપર એવી રીતે મૂકી શકાય કે એકનું એક બિંદુ ખીજીના એક બિંદુ ઉપર પડે અને એ બન્ને બિંદુ એમાંથી નિકળતી લીટીએ એકેકના ઉપર પડે. જેમકે અબક અને ડહફ એ



ત્રિકોણ છે; તેમાં અબક ને હંચકીને ડહફ ઉપર એવી રીતે મૂકે કે અ બિંદુ ડ ઉપર પડે, અને અબ લીટી ડહલીટી ઉપર પડે. (પહેલા સંઘના ચોથા સિદ્ધાંતમાં આ કૃત્ય વાપરેલું છે.).

પ્રત્યક્ષપ્રમાણો.

૧. જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની ખરોખર છે, તેઓ અરસ્પરસ ખરોખર છે.
૨. જે સમપરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે, તો સર્વાળા સમ થશે.
૩. જે સમપરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી સમ રહેશે.
૪. જે વિષમ પરિમિતોની સાથે સમપરિમિતો મેળવિયે તો સર્વાળા વિષમથશે.
૫. જે વિષમ પરિમિતોમાંથી સમપરિમિતો બાદ કરિયે તો બાકી વિષમ રહેશે.
૬. એકજ અથવા ખરોખર પરિમિતોની ખમણાઈ ખરોખર છે.
૭. એકજ અથવા ખરોખર પરિમિતોના અર્ધો ખરોખર છે.
૮. જે પરિમિતો એકક ઉપર મૂકતાં અરસ્પરસ મળી જાયછે અથવા અવકાશમાં એકજ જગ્યામાં ખરોખર માઈ રહેછે તેઓ ખરોખર છે.
૯. આપું તેના ભાગ કરતાં મ્હોટું છે.
૧૦. બે સીધી લીટીઓ અવકાશ ઘેરી શકતી નથી.
૧૧. સઘળા કાટખૂણા ખરાખર છે.
૧૨. જે એક સીધી લીટી બે બીજી સીધી લીટીઓને એવી રીતે મળે કે તેની એક બાજુના બે માંદેલા ખૂણાઓનો સર્વાળો બે કાટખૂણા કરતાં વ્યાછો થાય તો જે

બાળૂભણી બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા સર્વાળાવાળા ખૂણા છે તે બાળૂભણી એ બે લીટીઓને વધાર્યા કરી હોય તો તેઓ મળશે.

સમજણ.

આપણે ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં કહી ગયા છીએ કે યુક્તિડે સિદ્ધાંતોની સાબિતીમાં પુરાવાના કઠિન નિયમોને એવા દૃઢપણે સ્વીકારેલા છે કે આગલા સિદ્ધાંતમાં આત્રીપૂર્વક સાબિત ન થઈ હોય એવી કોઈપણ હકીકત ત્યારપછીના સિદ્ધાંતમાં સ્વીકારવામાં આવતી નથી. હવે કેટલાંક પ્રમાણો એવાં દેખીતી રીતે સત્ય છે કે તેમની સત્યતા સાબિત કરવા માટે વધારે સહેલાં પ્રમાણો મળી શકતાં નથી; જેમકે અનું વજન બનાવ વજન બરોબર છે; અને કનું વજન પણ બની બરોબર છે; તો અનું વજન કની બરોબર થશે. આ પ્રમાણ પ્રત્યક્ષ એટલે વગર સાબિતીએ ખરું જ છે, એમાં કોઈ શક નથી. માટે “પ્રત્યક્ષપ્રમાણ” નો અર્થ તો આ ઉદાહરણ ઉપરથી સમજાયો હશે.

જૂમિતિવિદ્યાનો આધાર થાડાંક આવાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણો જેની સત્યતા દેખીતીજ છે તેનાં ઉપર રહેલો છે.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણોમાં તર્કશાસ્ત્રના નિયમો પ્રમાણ નીચેનાં ત્રણ લક્ષણો આવશ્યક હોવાં જોઈએ.

- (૧) તેની સત્યતા દેખીતીજ હોવી જોઈએ.
- (૨) તેની સત્યતાનો આધાર તેના કરતાં કોઈ વધારે સહેલી સત્યતા ઉપર રહેલો જોઈએ નહિ.
- (૩) ખીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતાનો પુરાવો તેનાથી મળી શકે.

આ ઉપરથી પ્રત્યક્ષપ્રમાણની વ્યાખ્યા નીચે પ્રમાણે આપી શકાય.

પ્રત્યક્ષપ્રમાણ એક દેખીતી સત્યતા છે જે સિદ્ધતાથી સ્થાપન થઈ શકતી નથી અને જેને તેમ સ્થાપવાની જરૂર પણ નથી અને જેમાંથી બીજી પ્રતિજ્ઞાઓની સત્યતા સ્થપાય છે.

ઉપર આપેલાં બાર પ્રત્યક્ષપ્રમાણોના બે ભાગ એવી રીતે થઈ શકે છે કે, (૧) કેટલાંક સાધારણ એટલે જૂદી જૂદી વિદ્યાઓમાં સામાન્ય રીતે લાગુ પડી શકે છે, અને (૨) બાકીનાં આસ જૂનિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે. પહેલાં સાત તથા નવમું સાધારણ રીતે હમેશાં ખરાંજ છે; એક આખી વસ્તુ તેના એક ભાગ કરતાં મોટી હોવીજ જોઈએ; બે વસ્તુઓ એકજ વસ્તુથી બમણી હોય તો તેઓ બરોબર હોવી જોઈએ; ઇત્યાદિ. બાકીનાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણો જૂનિતિનાં પરિમિતોનેજ લાગુ પડી શકે છે.

અર્થાત્ પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તપાસી જોવાથી જણાશે કે ઘણાં ખરાં તુરતજ સમજી શકાય અને જેની સત્યતા નિઃસંશય છે એવાં છે; પણ મુખ્ય કરી છેલ્લું એવા પ્રકારનું છે કે તેની સમજ તુરત પડી શકતી નથી. આ ઉપરથી એમ નહિ ધારવું કે એ પ્રત્યક્ષપ્રમાણ નથી; કારણ કે એમાં શું કહેલું છે તે બરોબર જણીને બે લીટીઓ દારશે તો સ્પષ્ટ રીતે તે બે લીટીઓ મળવીજ જોઈએ. એ હવેની ટીકાઓ વાંચવાથી જણાશે. પણ યાદ રાખવું કે ઉપર કહેલાં પહેલા વર્ગનાં સાધારણ પ્રબંધ સામાન્ય રીતે ખરાં છે, તોપણ જૂનિતિમાં તો એ પ્રમાણે લીટી, સફાઈ, અવકાશ, વગેરેનેજ લાગુ પડે છે. બે ચોપડીઓ એકેકની બરોબર તો વજન, કિંમત, રંગ, વગેરે અનેક

પ્રકારે હોઈ શકે, પણ ભૂમિતિ માં તો અમિમળ સમજવું કે “તે-
ઓ અવકાશમાં એક સરખી જગ્યા ઘેરે છે.”

ટીપ.—પહેલાં પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપરથી નીચેના ઉપસિદ્ધાંતો
નિકળે છે:—

(૧) જો અ પદાર્થે બ ની બરોબર હોય, અને ક, ડ ની બ-
રોબર હોય, અને જો અ અને ક બરોબર હોય તો બ અને ડ
બરોબર થશે.

(૨) જો કેટલાક પદાર્થો અનુક્રમે હોય તેમાં પહેલો ખીજા
બરોબર, ખીજો ત્રીજા બરોબર, ઇત્યાદિ તો તેમાંના કોઈપણ
બે પદાર્થો એકેકની બરોબર થશે.

(૩) જો બે પદાર્થો બરોબર હોય, પણ તેમાંના એક કોઈ
ત્રીજા કરતાં મોટો હોય તો તેમાંના ખીજો પણ તે ત્રીજા કરતાં
મોટો થશે.

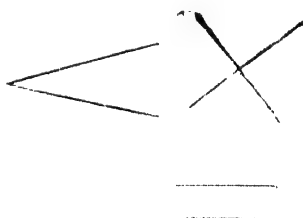
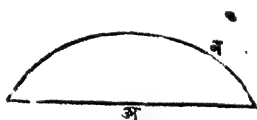
છઠ્ઠામાં બે ભાગ છે; એકજ પદાર્થનાં બમણાં સરખાં હોવાં
જોઈએ, તેમજ બે સરખા પદાર્થનાં બમણાં પણ સરખાંજ.
એ પ્ર૦ પ્ર૦ ખીજાં પ્રમાણમાંથી પણ સહજ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

સાતમાને પણ છઠ્ઠાની માફકજ સમજવું.

આઠમા પ્ર૦ પ્ર૦ ની સમજણ બરોબર પડવી જોઈએ. (૧)
ઉપર સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં આપણે કહ્યું છે તેમ જો
એક લીટી ઉંચકીને ખીજી લીટી ઉપર એવી રીતે મૂકાય કે
એકનો એક છેડો (બિંદુ) ખીજીના એક છેડા ઉપર પડે,
અને તે લીટીઓની દિશા પણ સરખીજ હોય, અને જો તેમ
કરતાં એવું બને કે ખીજો છેડો પણ ખીજા છેડા સાથેજ
બરોબર મળી જાય, તો સ્પષ્ટ છે કે તે બે લીટીઓં સરખીજ
હોવી જોઈએ; (૨) તેમજ જો એક ખૂણા ખીજા ખૂણા ઉપર

એવી રીતે મૂકિયે કે એકનું શિરોબિંદુ ખીજના શિરોબિંદુ ઉપર પડે, અને બન્નેની અંકેકી બાજુ એકેકના ઉપર એકજ દિશાએ પડે, અને જો તેમ કરતાં તે ઉપરાંત એવું બને કે બાકી રહેલી એ બાજુમાંથી પણ એક ખીજને ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે તે એ ખૂણા સરખાજ હોવા જોઈએ; (યાદ રાખવું કે દરેક બંને બાજુએની માત્ર દિશા એકજ હોવી જોઈએ; તેમની લંબાઈ સરખી હોવી જરૂરની નથી). (૩) તેમજ એક આકૃતિ ઉંચકીને ખીજ ઉપર એવી રીતે મૂકી શકિયે કે એક આકૃતિની બધી બાજુઓ ખીજની બધી બાજુઓને બરોબર ઢાંકી નાખે તો સ્પષ્ટ છે કે બધી બાજુઓ અને તેમની વચ્ચેના બધા ખૂણાઓ સરખાજ હોવા જોઈએ; અને એક આકૃતિ પણ ખીજની બરોબરજ હોવી જોઈએ.

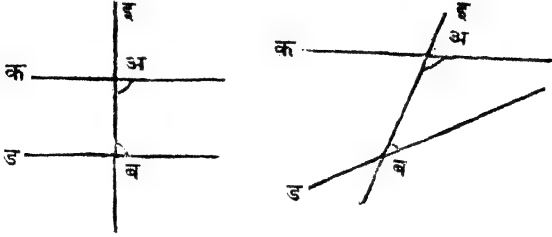
દશમા પ્રં પ્રં વિશે થા-
ડોક વિચાર જરૂરનો છે. આ-
કૃતિમાંની એ લીટીઓથી
અવકાશ (જગ્યા) ઘેરાયે છે;
પણ તે કાંઈ સીધી લીટીઓ
નથી; એમાં જ લીટી વકરેલા
છે; જો બન્ને લીટીઓ આ
પ્રમાણે સીધીજ દોરીશું તો હદ
થયલી આકૃતિ અથવા સફાઈ
થનાર નથી.



અગીઆરમું પ્રં પ્રં સમજવા માટે ગમે તે એ કાટખૂણા
લઈને સ્થાનોપરી કરી જોવાથી સરખાજ છે એમ ખાત્રી થશે.

બારમું પ્રં પ્રં બરોબર સમજવું આરંભમાં કઠિન છે; અને

પહેલા સંક્રંતનો ૨૮ માં સિદ્ધાંત જાણ્યા પહેલાં એની બરોબર સમજણ મળવી મુશ્કિલ છે; પણ આ બે આકૃતિઓ



ઉપરથી જરૂરજેટલી સમજણ તુરત મળી શકશે. પહેલી આકૃતિમાં ક અને ડ લીટીઓ ઉપર જ લીટી ઉભી પડે છે, અને તેથી અ અને બ ખૂણા દરેક દેખીતી રીતે એક કાટ-ખૂણા છે; માટે તે બે મળીને બે કાટખૂણા થયા. એ આકૃતિમાં ક અને ડ લીટી સમાન્તર લાગે છે. (યાદ રાખવું કે એનો એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાનો છે; અને તે આગળ જતાં સિદ્ધ થશે; માત્ર પ્રમાણ કેવું છે તેનો વિચાર આપવાનાજ હિતથી આ આકૃતિઓ દારી છે). હવે બીજી આકૃતિમાં અ અને બ ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં (પહેલી આકૃતિ સાથે સરખાવતાં) ઓછા દેખાય છે; તો ક અને ડ લીટીની સમાન્તરતા પણ નિકળી ગયલી તુરત દેખાય છે; એ બે લીટીઓ તો જો બાજુએ અ અને બ ખૂણા આવ્યા તે બાજુએ લંબાવીશું તો મળવાનીજ.

પ્રાસ્તાવિક પ્રકરણ.

એકજ સફાઈ ઉપર જે લીટીઓ અને આકૃતિઓ દોરી શકાય તેમના લક્ષણોનું વર્ણન યુક્તિહીન બૂમિતિમાં કીધું છે. પહેલા છ સ્કંધોમાં માત્ર સીધી લીટી, અને સીધીલીટી આકૃતિઓ, અને વર્તુલને લગતુંજ વર્ણન છે.

વ્યાખ્યા, સ્વીકૃત કૃત્યો અને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો શું તે તો આપણે જોયું. ફરીથી યાદ લાવવા સારૂ કહેવું જોઈએ કે જે પારિભાષિક શબ્દો બૂમિતિમાં વાપરવામાં આવ્યા હોય તે શબ્દોનો અર્થ બતાવેલા તે તે શબ્દની વ્યાખ્યા. સિદ્ધાંતો સાબિત કરવા માટે ત્રણ સહેલાં કૃત્યો કરવાની જરૂર છે, જે વિના તેની સાબિતી થઈ શકે નહિ, અને જે પહેલાંથી માગી લીધેલાં છે તે ત્રણ કૃત્યો સ્વીકૃત કહેવાય છે. કેટલાંક પ્રમાણો એટલાં દેખીતાં છે કે તેમને વધારે સહેલાં પ્રમાણોથી સોબિત કરવાં અશક્ય છે; તેવાં પ્રમાણોને પ્રત્યક્ષપ્રમાણો કહેવાં. આ પ્રમાણે બૂમિતિની બાયાના આસ શબ્દોનો અર્થ સમજ્યા પછી, અને ત્રણ સ્વીકૃત કૃત્યો અને બાર પ્રત્યક્ષપ્રમાણોનો આધાર લઈને, સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવાને આપણે તૈયાર છીએ.

ઉપર કહેલા, લીટી, આકૃતિ વગેરેના ગુણો યુક્તિહીન કેટલાક સિદ્ધાંતોથી સાબિત કરી આપે છે; તે એવી રીતે કે એક સિદ્ધાંતમાં આત્રીથી સાબિત કરી ગયા તેને ત્યાર પછીના હરકોઈ સિદ્ધાંતમાં અર્થ છે એમ માનવું; ને આગળ વધવું અને નવા નવા સિદ્ધાંતો શોધતા અને સાબિત કરતા જવું. આવી રીતે તર્ક કીધાથી જે પરિણામો નિકળે તેને સિદ્ધાંત કહે છે. દરેક સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવા પહેલાં તેમાં શું સિદ્ધ કરવું છે અથવા શું કાર્ય કરવું છે તે આપણી સામે પહેલાં નિશ્ચિત અને સારૂ

શબ્દોમાં મૂકવું જોઈએ; એ પ્રમાણે સિદ્ધાંતને મથાળે પહેલે તેની પ્રતિમા આવેછે. ભૂમિતિની પ્રતિમાએ એ પ્રકારની છે; (૧) કૃત્યો અને (૨) પ્રમેયો. કોઈ વેળાએ પ્રતિમામાં કાંઈ કરવાનું કહેલું છે; જેમકે, એક આપેલી લીટી ઉપર એક સમબાજૂ ત્રિકોણ દોરવાના; અથવા એક ત્રિકોણ એવા બનાવવા કે તેની ત્રણ બાજુએ ત્રણ આપેલી સીધી લીટીઓની બરાબર હોય; ઇત્યાદિ. આવા સિદ્ધાંતને કૃત્ય કહેછે. એથી ઉલટું કોઈ વેળાએ કાંઈ તત્ત્વની સત્યતા બતાવવાની હોયછે; જેમકે, એવું સાબિત કરે કે કોઈ પણ ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા મળીને એ કાટખૂણા જેટલાજ થશે; અથવા એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુએ સરખી હોય તો તેના ત્રણ ખૂણા પણ સરખાજ હોવા જોઈએ; ઇત્યાદિ. આવા પ્રકારના સિદ્ધાંતને પ્રમેય કહેછે. હવે એ બન્ને પ્રકારના સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરવા માટે પહેલાં તે પ્રતિમા લખીને તે પ્રમાણે એક આકૃતિ દોરીને શું આપેલું છે અને શું માગેલું અથવા કરવાનું છે તે કહેવું જોઈએ. ત્યાર પછી માગેલું પરિણામ ખરેખર મળેછે કે નહિ તે તપાસવાને આકૃતિ સંપૂર્ણ કરવી, એટલે જરૂર પ્રમાણે લીટીઓ બંધાવવી, અથવા બિંદુઓ સાંધવા; અથવા વર્તુલો દોરવા, વગેરે કૃત્યો કરવાં તેનું નામ રચના; ત્યાર પછી જે માગ્યું હોય તે બનાવવાનું અથવા તેની સત્યતા આગલા સિદ્ધાંતોની મદદ વગેરેથી બતાવી આપવાનું કામ રહ્યું, તેને સિદ્ધતા કહેછે. સિદ્ધાંતોને અનુક્રમે નંબરો હોયછે. માટે હવે સિદ્ધાંતની ગોઠવણ કેવી હોયછે તેના વિચાર આવી શકશે.

(૧) સિદ્ધાંત (નમ્બર). (૨) કૃત્ય કે પ્રમેય ?

(૩) પ્રતિમા.

- (૪) પ્રતિમા પ્રમાણે આકૃતિ.
- (૫) રચના.
- (૬) શું સિદ્ધ કરવું છે તે પ્રસિદ્ધ કરવું.
- (૭) સિદ્ધતા અથવા પુરાવા.
- (૮) સિદ્ધતા ઉપરથી શું સાબિત થયું તે.

એ પ્રમાણે ૮ ભાગ થયા. દરેક સિદ્ધાંતમાં એ આઠ ભાગ જૂદા લખવા જોઈએ; પણ તેમ કરતાં લખાણ થઈ જવાને લીધે (૪), (૬) અને (૮) અવશ્ય પુરાવામાં તો આવે છે જ, પણ તેમનાં જૂદાં મથાળાં લખાતાં નથી. તે શિવાયનાં મથાળાં બધી સિદ્ધતાઓમાં લખવાં જરૂરનાં છે. એક કૃત્ય અથવા પ્રમેય પુરું થયું કે તેની નીચે “આજ કૃત્ય કરવાનું હતું” અથવા “આજ પ્રમેય સિદ્ધ કરવાનું હતું” એવા શબ્દો લખવાનો ધારો છે. માટે આ વાક્યોમાં સંસ્કૃત ભાષાંતરો સંક્ષેપમાં લખવાં. પહેલાંને માટે કૃત્ય કૃતં (સંક્ષેપમાં ક્ર. ક્ર.) અને ખીજને માટે પ્રમેય સિદ્ધં (સંક્ષેપમાં પ્ર. સિ.)

ધણી વેળાએ સિદ્ધાંતની પ્રતિમામાં જે બાબદ આપેલી અથવા સ્વીકારેલી જ હોય તે પુરાવા માટે વાપરવી પડે છે; ત્યારે તે બાબદ લખીને તેની પાસે કૌંસમાં (પ્રતિ૦) લખવામાં આવે છે; તેના અર્થ એમ કે, એ વાત તો પ્રતિમામાં કબ્બુલ કરીધેલી છે જ.

તેજ પ્રમાણે કોઈ પણ સિદ્ધાંતની સાબિતીમાં જે જે આપણે આગળ શીખી ગયા તેનો આધાર લેવાની હરકત નથી. પણ તે આધાર શાથી મળ્યો તે ટુંકામાં ખાતરી માટે પાસે લખવો જરૂરનો છે. જેમકે રચના કરતાં એ બિંદુઓ સાંધ્યાં

તો મુરત તેની પાસે (સ્વી. ૧) લખવું; એટલે તેથી સમજાવું કે આ કૃત્ય આપણે પહેલા નમ્પરના સ્વીકૃત કૃત્યને આધારે કીધું. એજ પ્રમાણે વળી એક સિદ્ધાંતમાં તેની અગળના સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો હોય તો તે પણ એમજ લખાયછે. ધારે કે ત્રીજા સ્કંધના ૩૧મા સિદ્ધાંતમાં પહેલા સ્કંધની ૧૫મી વ્યાખ્યાની જરૂર પડી; તો તે (૧. વ્યા. ૧૫) કરી લખવું; અને ત્રીજા સ્કંધના ૨૨મા સિદ્ધાંતનો આધાર લીધો તો (૩. ૨૨) કરી લખવું. એ વગેરે માટે નીચે આપેલા સંક્ષેપ ધ્યાનમાં રાખવા:—

(૧. વ્યા. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધની પાંચમી વ્યાખ્યા.

(સ્વી. ૩) એટલે ત્રીજું સ્વીકૃત કૃત્ય (એ કૃત્યો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે).

(પ્ર. પ્ર. ૭) એટલે સાતમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણથી; (એ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણો માત્ર પહેલાજ સ્કંધમાં છે).

(૧. ૫) એટલે પહેલા સ્કંધના પાંચમા સિદ્ધાંત પ્રમાણે.

(૨. ૭) „ ખીજા „ સાતમા „ „

(પ્રતિ.) „ જે સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવો છે તેજ સિદ્ધાંતની પ્રતિમાને આધારે.

(૨અ.) એટલે તેજ સિદ્ધાંતની રચના કીધી છે તેને આધારે.

ઉપલા સંક્ષેપો દરેક સિદ્ધાંતમાં વપરાયછે; તે ઉપરાંત નીચેના સંક્ષેપો પણ કોઈએના વપરાયછે.

∴ કારણ કે, ∴ માટે,

= ખરોત્તર, < ખૂણા, ⊥ કાટખૂણા.

Δ ત્રિકોણ, ॥ અથવા = સમાન્તર સીધી લીટીઓ.

— લંબ, ૦ વર્તુલ, સીં લીં સીધી લીટી, ચોં ચોરસ.

એક સિદ્ધાંત સિદ્ધ થવાથી ખીજ કોઈ સત્યતા તુરતજ તે ઉપરથી ઉત્પન્ન થતી હોય, તો તેવી આધાર રાખતી સત્યતાને ઉપસિદ્ધાંત કહેછે. એવા ઉપસિદ્ધાંતો કોઈ વખતે તેમની પછીના સિદ્ધાંતોમાં પુરાવા એટલે આધાર માટે કામ પણ આવેછે; એવા ઉપસિદ્ધાંતો તેઓના સિદ્ધાંતને છેડે લખવામાં આવેછે અને તેમ લખ્યા હોય તોજ આધાર માટે લેવાયછે જેમકે (૨. ૪ ઉપ.) એટલે “ખીજ રૂઢિના યથા સિદ્ધાંતને છેડે આપેલા ઉપસિદ્ધાંતને આધારે” એમ સમજવું.

કોઈકોઈ સિદ્ધાંતની નીચે સમજણ સહેલ કરવા માટે અથવા અગત્યની સૂચના માટે ટીપ આપી છે, તે છોડી નદેતાં સરખાજ ધ્યાનથી ગ્રહણ કરવી.

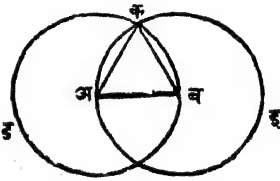
દરેક સિદ્ધાંત નીચે પ્રશ્નો આપ્યા છે, તે બનતાં સૂધી સહેલા અને તુરત થાય એવા નવા સિદ્ધાંતો છે; તે તંક મળે કરવાથી આ વિદ્યાનું વધારે મજબૂત જ્ઞાન સમ્પાદન થશે; અને વિદ્યાર્થીની બુદ્ધિની કસોટી થઈ પડશે એટલુંજ નહિ, પણ જે ચોપડીમાંના સિદ્ધાંતો છે તે વધારે મજબૂતીથી મન ઉપર ઠસશે. બનતાં સૂધી શિક્ષકે એ પ્રશ્નો ઘેરથી ટુંકી રીતે લખી મંગાવવા.

સિદ્ધાંત ૧, કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી વ્યન્તવાન સીધી લીટી ઉપર એક સમખાળૂ ત્રિકોણ કહાડવો.

સાધન.

ધારો કે અવ આપેલી સી-
ધી લીટી છે; તે અ વ્યને વ
ખજો તરફથી હદ થયલી છે,
તેના ઉપર એક સમખાળૂ ક
ત્રિકોણ કહાડવાનો છે.



રચના.

અ મધ્યબિંદુ લઈને વ્યને અવ જોડેલો વ્યન્તર
એટલે ત્રિજ્યા, લઈને એક વક્ર વર્તુલ દોરો (સ્વી. ૩).

વ મધ્યબિંદુ લઈને વ્યને અવ ત્રિજ્યા લઈને અક
વર્તુલ દોરો. (સ્વી. ૩).

આ બે વર્તુલો એકેકને બે બિંદુમાં છેદેછે, તેમાંના
એક ક બિંદુમાંથી, અ વ્યને વ બિંદુઓ સૂધી બે સીધી
લીટીઓ કાઢીને વ્યને કાઢ દોરો. (સ્વી. ૧).

ત્યારે અવક માગેલો સમખાળૂ ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

અ બિંદુ વક્ર વર્તુલનું મધ્યબિંદુ છે; માટે અક સીધી
લીટી અવ સીધી લીટીની બેરોબર છે. (બ્યા. ૧૫).

અને વળી અકદ વર્તુલનું મધ્યબિંદુ બ છે,
માટે વક લીટી વજ ની યરોયર છે. (વ્યા. ૧૫).

પણ ઉપર પતાવ્યું છે કે અવ તો અકની યરોયર છે;
માટે અક અને વક દરેક અવની યરોયર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની યરોયર છે
તેઓ અરસ્પરસ યરોયર હોવાં જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૧).

માટે અક લીટી વકની યરોયર છે;

માટે વક, અવ અને વક ત્રણે અરસ્પરસ સરખી છે;

એટલે અવક ત્રિકોણ સમબાજુ છે; અને તે વળી
આપેલી લીટી અવના ઉપર કહાડ્યો છે. ક. ક.

પ્રત્યો.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં જે ખીજ બિંદુમાં બન્ને વર્તુલા
એકેકને છેદેછે તે બિંદુ આપેલી લીટીના છેડા સાથે જોડતાં
માળ્યા પ્રમાણેના એક ખીજે ત્રિકોણ થશે.

(૨) ઉપલી સિદ્ધતા સંક્ષેપમાં લખો.

અવક \odot નું મધ્યબિંદુ અ છે,

\therefore અવ = અક (વ્યા. ૧૫).

તેમજ વજ = વક ,,

\therefore અવ = અક = વક (પ્ર. પ્ર. ૧).

\therefore અવક સમબાજુ \triangle અવ લીટી ઉપર થયો.

(૩) એક સમયાંદ સીધી લીટી ઉપર કૃત્ત કેટલા સમ-
બાજુ ત્રિકોણો દોરી શકાય તે આકૃતિરચના ઉપરથી કહે.

સિદ્ધાંત ૨. કૃત્ય.

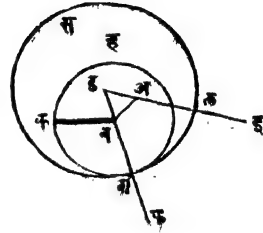
પ્રતિજ્ઞા:—એક વ્યાપેલા પિંદુમાંથી એક એવી સીધી લીટી દોરવી કે તે એક વ્યાપેલી સીધી લીટીની યરો-બર થાય.

સાધન.

ધારો કે અ વ્યાપેલું પિંદુ છે; વ્યને વક વ્યાપેલી લીટી છે; તો અ પિંદુમાંથી એક લીટી વકની બજેબર દોરવી છે.

રચના.

અથી વ સૂધી અવ લીટી દોરો. (સ્વી. ૧)



વ્યને અવ ઉપર એક સમખાળુ ત્રિકોણ અવડ કહા-ડો. (૧. ૧)

જઅ વ્યને જવ સીધી લીટીઓને જ વ્યને વ સૂધી લંખાવો. (સ્વી. ૨)

વ મધ્યપિંદુ લઈને, વ્યને વક ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ કગહ દોરો; (સ્વી. ૩)

ધારો કે તે જવ ને ગ પિંદુમાં છેદેછે. વ્યને જ મધ્ય-પિંદુ લઈને, જગ ત્રિજ્યાએ ગસલ વર્તુલ દોરો (સ્વી. ૩) જે અહ ને લ પિંદુમાં છેદેછે.

ત્યારે અલ લીટી માગ્યા પ્રમાણે વકની યરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

વ પિંદુ કગહ વર્તુલનું મધ્યપિંદુ છે.

માટે વક લીટી વગની યરોયર છે (વ્યા. ૧૫)

અને હ યિદુ ગસલ વર્તુલનું મધ્યયિદુ છે,

માટે હલ લીટી હગની યરોયર છે. (વ્યા. ૧૫)

પણ હલ નો એક ભાગ હઅ તે હગ ના એક ભાગ હવ ની યરોયર છે. (૧. ૧.)

માટે સરખા ભાગો આદ કરતાં, પાકીનો ભાગ અલ તે પાકીનો ભાગ વગ ની યરોયર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩);

પણ ઉપર અતાવ્યું કે વક પણ વગ ની યરોયર છે;

માટે અલ અને વક દરેક વગ ની યરોયર છે.

પણ જે પરિમિતો એકજ પરિમિતની યરોયર છે તે અરસ્પરસ યરોયરજ હોવાં જોઈએ.

માટે અલ સીધી લીટી વક ની યરોયર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

એટલે વ્યાપેલા જ યિદુ માંથી અલ લીટી વ્યાપેલી સીધી લીટી વક ની યરોયર માગ્યા પ્રમાણે દોરાઈ. ક. ક.

સૂચના:—આકૃતિ યરોયર દોરવા માટે વિદ્યાર્થીએ પહેલા મોટા વર્તુલ દોરવો; પછી તેમાં ન્હાનો વર્તુલ એવી રીતે દોરવો કે બન્નેનાં નીચેનાં યિદુએ અરસ્પરસ અડકી રહે; ને પછી પછવાડેથી મોંઢેની લીટીએ દોરવી; ફક્ત સારી આકૃતિ દોરવા માટે આ સૂચના કીધી છે. રચના લખવી તે તો સિદ્ધાંતમાં કહ્યા પ્રમાણેજ.

ટીપ (૧) આ સિદ્ધાંતની રચના કઠિન છે; અને એટલી ભારી રચનાવાળા સિદ્ધાંતો પહેલા સ્કંધમાં થોડાજ છે; માટે આકૃતિ યરોયર રચવી જરૂરની છે; તે માટે નીચે લખેલી બાબદો ધ્યાનમાં રાખવી:—

(૧) આપેલા બિંદુને આપેલી લીટીના નજદીકના છેડા સાથે સાંધવું.

(૨) પછી એ સાંધનારી લીટી ઉપર એક સમબાજુ ત્રિકોણ દોરવો.

(૩) પછી તે ત્રિકોણની ઉપલી બે બાજુઓ દૂર સ્થંધી લંબાવવી.

(૪) પછી આપેલી લીટીના સાંધેલા છેડાને મધ્યબિંદુ લઈને, અને આપેલી લીટીનેજ અનંતર એટલે ત્રિજ્યા ગણીને પહેલા (નહાનો) વર્તુલ દોરવો.

(૫) આ વર્તુલ લંબાવેલી બંને બાજુઓને છેદશેજ.

(૬) ત્રિકોણના છેક ઉંચા શિરોબિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને ત્યાંથી તે છેક આપેલી લીટીના છેડાની પાર જઈને જે બિંદુમાં પહેલા વર્તુલ લીટીને છેદે છે, ત્યાં સ્થંધીની ત્રિજ્યા લઈને મોટા વર્તુલ દોરવો.

(૭) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીના બેમાંથી ગમે તે છેડા સાથે સાંધવું, અને સાંધનારી લીટી ઉપરના ત્રિકોણ લીટીની ઉપર અથવા હેઠળ ગમે તેમ દોરવો. બધી એટલે ચારે રીતે માગેલી લીટી મળી આવશે. વિદ્યાર્થીએ એ ચારે આકૃતિઓ દોરીને તપાસવી.

(૮) યાદ રાખવું કે જો કમ્પાસે વતી લીટીની લંબાઈ બરવાની છુટ હત તો આ સિદ્ધાંત કરવાની જરૂર ન હતી પણ યુક્તિએ તે વાત સ્વીકારી નથી.

પ્રશ્ન.

(૧) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી અમર્યાદ સીધી લીટીને મળે એવી એક આપેલી લંબાઈની લીટી દોરો.

(૨) આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીમાં જ હોય તો ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) તેમજ આપેલું બિંદુ આપેલી લીટીનો એક છેડો હોય તો.

(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમઘ્રિયાળ ત્રિકોણ કહાડો કે જેની સરખી બાજુઓ એક આપેલી સીધી લીટીની બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલી લીટી ઉપર એવો એક સમઘ્રિયાળ ત્રિકોણ કહાડો કે તેની બે સરખી બાજુઓ તેના પાયા કરતાં એવડી હોય.

(૬) જો અબ=અક તો કે બિંદુ નહાના વર્તુલના પરિઘ ઉપર પડશે.

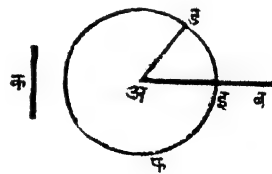
સિદ્ધાંત ૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—બે આપેલી સીધી લીટીઓમાંની મોટીમાંથી નહાની લીટી બરોબર એક ભાગ કાપવો.

સાધન.

ધારો કે અબ અને ક બે આપેલી સીધી લીટીઓ છે; જેમાં અબ મોટી છે.

અબ લીટીમાંથી એક ભાગ ક લીટી જેટલો કાપવો છે.



રચના.

અ બિંદુમાંથી એક અડ લીટી કે લીટીની બરોબર દોરો (૧. ૨)

પછી અ મધ્યખિંદુ લઈને, અને અડ ત્રિભ્યા લઈને
એક વર્તુલ ડહફ દોરો; ધારો કે તે વર્તુલ અમ લીટીને
દખિંદુમાં છેદેછે.

તો અડ ભાગ ભાગવા પ્રમાણેનો થશે.

સિદ્ધતા.

ડહફ વર્તુલનું અ મધ્યખિંદુ છે;
માટે અડ લીટી અડ ની યરોઅર છે. (વ્યા. ૧૫)
પણુ અડ તો ક લીટીની યરોઅર છે. (રચના)
માટે અડ અને ક દરેક અડ ની યરોઅર છે.
માટે અડ લીટી ક ની યરોઅર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)
અને તે આપેલી મ્હોટી લીટીમાંથી આપેલી ન્હાની
લીટી યરોઅર કાપી. ક. ક.

પ્રશ્ન.

- (૧) એ આપેલી લીટીના સવાળા યરોઅર એક લીટી દોરો.
- (૨) એ આપેલી લીટીની બાદબાકી યરોઅર એક લીટી
દોરો.
- (૩) એક ન્હાની આપેલી લીટીને લંબાવીને મ્હોટી આ-
પેલી લીટી યરોઅર દોરો.

સિદ્ધાંત ૪ ની સમજણ.

ચોથા સિદ્ધાંત ઘણા અગત્યનો છે; અને એમાં જે પુરાવો
વાપરવામાં આવ્યો છે તે નવીન તરેહનો છે, માટે તે વિશે આ
કીપ પહેલાંથી વાંચવાથી ફાયદો થશે.

કોઈ પણ એક ત્રિકોણમાં ઘ પરિમિતો હોયછે; ત્રણ બાજુ
અને ત્રણ ખૂણા; હવે જો એ આપેલા ત્રિકોણમાં કોઈ ફરીને

ઉપલાં છમાંનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં આખ્યાં હોય તો બાકીનાં ત્રણ સરખાં થશે; અને ત્રિકોણ આખા પણ એકેકને સરખા થશે. એવી રીતે બે ત્રિકોણની સરખાઈ રથાપવાને પહેલા સ્કંધમાં ત્રણ સિદ્ધાંતો સિદ્ધ કરીધા છે. તેમાંનો પહેલો આ છે, બીજા નમ્બર ૮ અને ૨૧ છે. આ સિદ્ધાંતમાં એમ આપેલું છે કે એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ જુદી જુદી બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર છે; અને ત્રીજું એ કે તે બંને બાજુઓની વચ્ચે આવેલા ખૂણા પણ બંને ત્રિકોણમાં સરખા છે; તો સિદ્ધ કરવું કે તે ત્રિકોણનાં બાકીનાં પરિમિતો પણ સરખાં જ થશે; અને બંને ત્રિકોણો પણ સરખાં જ થશે.

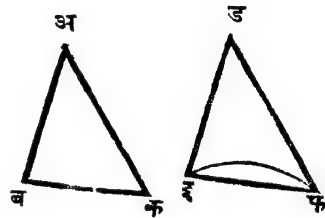
સિદ્ધતા સ્થાનોપરી કરવાથી થશે. એ વિશે વ્યાખ્યા ૧૦-૧૨ની સમજણમાં લખ્યું છે તે તથા સ્વીકૃત કૃત્યોની સમજણમાં જ છેલ્લે કહ્યું છે તે બરાબર ધ્યાનમાં લેવું. પુરાવામાં એક ત્રિકોણ ઉંચકાને બીજા ઉપર મુકાને પછી સિદ્ધ કરે છે કે તે બંને એકેક ઉપર બરાબર પડી જાય છે. માટે તેઓ સરખા હોવા જોઈએ.

સિદ્ધાંત ૪. પ્રમેય.

વ્યાખ્યા:—જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અલગમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને વળી તે સરખી બાજુઓની વચ્ચે આવેલા અંતર્ખૂણાઓ પણ બરાબર હોય તો (૧) તે ત્રિકોણોના પાયા એટલે બાકીની બાજુઓ બરાબર થશે. (૨) બાકી રહેલા ખૂણાઓમાંથી જે ખૂણાઓ સરખી બાજુઓની સામેના છે તેઓ અસ્પર્શ બરાબર થશે અને (૩) તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરાબર થશે.

સાધન.

ધારેકે અવક વ્યને ડફ બે વ્યાપેલા ત્રિકોણો છે;
જેમાં અવ બાળુ ડફ ની
પરોપર છે, અવ બાળુ
ડફની પરોપર છે વ્યને
અન્તર્ખૂણો બઅવ તે
હફ અન્તર્ખૂણાની પ-
રોપર છે તો સિદ્ધ કે-
રવાનું કે (૧) અવ બાળુ
ફફની પરોપર થશે; વ્ય-
ને (૨) અવ બાળુની સામેનો ખૂણો અવક તે ડફ બાળુની
સામેના ખૂણા ડફની પરોપર થશે, વ્યને અવની સા-
મેનો ખૂણો અવક તે ડફ ની સામેના ખૂણા ડફની
પરોપર થશે, વ્યને (૩) અવક ત્રિકોણ ડફ ત્રિકોણની
પરોપર થશે.



સિદ્ધતા.

કારણ કે જો અવક ત્રિકોણ ઉંચકીને ડફ ત્રિકોણ
ઉપર મૂકાયે એવી રીતે કે અ બિંદુ ડ બિંદુ ઉપર પડે વ્યને
અવ લીટી ડફ લીટીની દિશામાં હોય, તો બ બિંદુ ઇ બિંદુ
ઉપર પડવું જોઈએ.

કારણ કે અવ લીટી ડફ ની પરોપર છે. (પ્રતિમા)

હવે અવ લીટી ડફ ઉપર પરોપર પડી રહે છે તો અવ
લીટી ફફ ના ઉપર તેજ દિશાએ પડવી જોઈએ;

કારણ કે બઅવ ખૂણો હફ ખૂણાની પરોપર છે. (પ્ર.)

જો એમ ન પડે તો તો અ વ્યને ડ ખૂણા નહાના
મ્હોટા થાય.

વળી અ યિદુ ડ ઉપર પડેછે અને અક તથા ડક લીટી-
ઓની દિશા એકજ છે, તો ક યિદુ ફ ઉપર પડવુંજ
જોઈએ.

કારણ કે અક લીટી ડકની યરોયર છે (પ્રતિ.).

આપણે જોયું કે વ યિદુ ડ ઉપર પડેછે.

અને ક યિદુ ફ ઉપર પડેછે,

તો તેમની વચ્ચે આવેલી બક લીટી ડક ઉપર પડવીજ
જોઈએ; કેમકે જો તેમ ન પડે અને આકૃતિમાં ખતાવ્યા
પ્રમાણે એ ચારમાંના બધે યિદુઓ મળવા છતાં એકેક
ઉપર ન પડે તો તે એ સીધી લીટીઓ અવકાશ ધેરે;
પણ એ તો અશક્ય છે; (પ્ર. પ્ર. ૧૦)

માટે બક લીટી ડક ના ઉપરજ પડવી જોઈએ અને
તેઓના છેડા તો એકજ યિદુમાં આવી રહેલા છે.

માટે (૧) બક લીટી ડકની યરોયર છે. (પ્ર. પ્ર. ૮)

વળી અબક ત્રિકોણના વ અને ક ખૂણા પણ ડક
ત્રિકોણના ઇ અને ફ ખૂણા ઉપરજ પડેછે,

માટે (૨) અબક ખૂણો ડક ખૂણાની યરોયર છે.

(પ્ર. પ્ર. ૮)

અને અકવ ખૂણો ડક ઇ ખૂણાની યરોયર છે.

(૩) વળી આખો અબક ત્રિકોણ ડક ત્રિકોણ ઉપર
યરોયર પડી રહેછે;

માટે અબક ત્રિકોણ પણ ડક ત્રિકોણની યરોયર છે.

(પ્ર. પ્ર. ૮)

માટે, જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ ધૃ.

મ. સિ.

ટીપ્પણ:—(૧) આ સિદ્ધાંત પ્રમેય છે; પહેલા ત્રણ કૃત્ય હતા. એમાં કાંઈ બનાવવાનું નથી; પણ જો એક ત્રિકોણનાં ત્રણ આપેલાં પરિમિતો બીજાનાં ત્રણની બરાબર હોય, તો તે ત્રિકોણ બની રીતે સરખા થશે એવું સિદ્ધ કરવાનું છે.

(૨) યુક્તિએ સ્વીકૃત કૃત્યોમાં સ્થાનોપરી કરવાનું સ્વીકાર્યું તો નથી માટે ત્રિકોણ એકેક ઉપર મૂકી શકાય એવું કલ્પનાથીજ વિચારવાનું છે, તોપણ શિક્ષક જો ત્રિકોણ કાગળ ૪૦ ના લઈને એકેક ઉપર શિરોબિંદુ વગેરે મૂકીને બનાવશે તો આ સિદ્ધાંત સહેલથી સમજશે.

પત્રો.

(૧) જો અક=૭૬ હોય, અને બક=૭૬ હોય, તો કયા ખૂણા સરખા આપેલા હોવા જોઈએ; અને કયા ખૂણા સરખા થશે તે સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ચોરસની કાંઈ ખૂણાઓને તથા ચોરસને દ્વિભાગે છે.

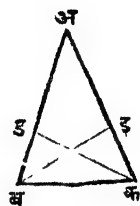
(૩) એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના શિરોબિંદુને દ્વિભાગનાર લીટી પાયાને મળે તો તે પાયાને દ્વિભાગશે; અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

(૪) જો અબક ત્રિકોણ સમદ્વિબાજૂ હોય તો ઉપર પ્રમાણેની સિદ્ધતાથી સિદ્ધ કરો કે બ અને ક ખૂણા સરખા થશે.

સિદ્ધાંત પત્રોની સમજણ.

પાંચમો સિદ્ધાંત ધ્યાન કરીને આરંભ કરનારાઓને કહિત લાગે છે, માટે આ નીચે આપેલો સિદ્ધાંત જો ચોથાનોજ એક જૂદો આકાર છે તે પહેલે જોવાથી પાંચમો કદાચ વધારે સહેલાઈથી સમજશે.

એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણુ અબક ની અબ અને અક સમબાજીઓમાં હ અને હ એવાં બિંદુઓ લીધાં છે કે અહ=અહ છે; અને બહ તથા હક બિંદુઓ જોડ્યાં; તો બહ લીટી હકની બરોબર થશે.



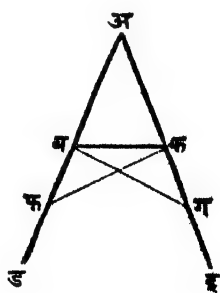
કારણ અહક અને અબહ ત્રિકોણમાં અહ=અહ છે; અને અબ=અક છે. (પ્રતિ) એકની બે બાજુઓ અહ અને અક બીજાની બે બાજુઓ અહ અને અબની બરોબર છે; અને તેમના અંતર્ગતો એક જ છે એટલે સરખાજ છે. ∴ એ બે ત્રિકોણો સરખા થયા; અને હક લીટી બહની બરોબર થઈ.

સિદ્ધાંત ૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—સમદ્વિબાજી ત્રિકોણુની બરોબર બાજુની સામેના (એટલે પાયા ઉપરના) ખૂણાઓ બરોબર છે; અને તે સમબાજીઓને લંબાવિયે તો પાયાની બીજી બાજુએ ખૂણા થશે તે પણ (એકેકની) બરોબરજ થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણુ છે; જેની અબ બાજુ અક બાજુની બરોબર છે; ધારો કે તે સરખી બાજુઓ હ અને હ બિંદુઓ સૂધી વધારી તો અબક ખૂણો અકબ ખૂણાની બરોબર થશે; અને કબહ ખૂણો અકહ ખૂણાની બરોબર થશે.



રચના.

વડ લીટીમાં એક ફ ખિદુ લો;

અને આખી અડ લીટીમાંથી એક અગ ભાગ, અફ લીટીની યરોઅર કાપો. (૧. ૩)

ફ,ક અને વ,ગ ખિદુઓ સાંધો. (૨વી. ૧)

સિદ્ધતા.

ફઅક અને ગઅવ ત્રિકોણોમાં,

ફઅ લીટી ગઅની યરોઅર છે, (રચના)

અને અક લીટી અવની યરોઅર છે, (પ્રતિ.)

માટે એક ત્રિકોણની ફઅ, અક લીટીઓ ખીજા ત્રિકોણની ગઅ, અવ લીટીઓની યરોઅર છે,

અને અનુપૂર્ણા અને ત્રિકોણમાં સાધારણ છે.

માટે ફઅક ત્રિકોણ ગઅવ ત્રિકોણની યરોઅર છે. (૧.૪)

એટલે ફક લીટી ગવ ની યરોઅર છે.

અને અકફ ખૂણો અવગ ખૂણાની યરોઅર છે,

અને અકક ખૂણો અગવ ખૂણાની યરોઅર છે.

વળી, આખી અફ લીટી અગની યરોઅર છે. (રચ.)

તેમાં અવ અને અક યરોઅર આપેલી છે, (પ્રતિ.)

માટે આકીનો ભાગ વફ તે આકીના ભાગ કગ ની યરોઅર થવો જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૩)

ત્યારે, વફક, કગવ ત્રિકોણોમાં, વફ લીટી કગની યરોઅર છે, (સિદ્ધતા)

અને ફક લીટી ગવ ની યરોયર છે, (સિદ્ધતા)

અને અન્તર્જૂણા વકક અને કગવ યરોયર છે,
(સિદ્ધતા)

માટે વકક અને કગવ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સર-
ખા છે.

અને વકક ખૂણો ગકવ ખૂણા યરોયર છે,

અને વકક ખૂણો કગવ ખૂણા યરોયર છે (૧-૮)

પણ ઉપર ખતાવ્યું છે કે આખો અવગ,

આખા ખૂણા અકક ની યરોયર છે.

અને હમણાં સિદ્ધ કીધું કે તેમના ભાગો કગવ અને
વકક સરખા છે.

માટે આકીનો ખૂણો અવક આકીના ખૂણા અકવ ની
યરોયર થયો. (પ્ર. પ્ર. ૩)

અને એ અવક ત્રિકોણના પાયા ઉપરનાજ ખૂણા છે.

વળી, ઉપર ખતાવી ગયા કે વકક અને ગકવ ખૂણા
પણ યરોયર છે;

અને તે પાયાની ખીજ બાજુના ખૂણા છે.

માટે આપણે સિદ્ધ કીધું કે એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકો-
ણમાં ઇ. પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:—જો એક ત્રિકોણ સમબાજુ હોય તો તેના
ખૂણા પણ સમ હોવા જોઈયે.

પ્રત્યો.

(૧) સમબાજુ ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા યરોયર છે.

(૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ
જે સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અવક અને ડવક છે; જેમાંના ખીજો

ત્રિકોણ પેહેલાની અંદર પડેછે, તો ખતાવો કે અબડ ખૂણા
= અકડ ખૂણા.

(૩) ઉપલોજ પ્રશ્ન એ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો પાયાની જુદી
જુદી બાજુએ લઈને સાબિત કરો.

(૪) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ
એ સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણો કહાડ્યા હોય તો ખતાવો કે એકનું
શિરોબિંદુ બીજા ત્રિકોણની કોઈપણ બાજુના ઉપર પડી
શકે નહિ.

(૫) ઉપલો સિદ્ધાંત ધણી સહેલાઈથી ૪ થા સિદ્ધાંતના
૪ થા પ્રશ્નની સહાયથી થઈ શકેછે, તે ખતાવો.

(૬) એજ સિદ્ધાંત સમબાજુએ ન વધારતાં, તે બાજુ-
એમાં ૩ અને ૬ બિંદુએ જ થી સરખે અન્તરે લઈને
સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત દ્વિતી સમજણ.

જો એ પ્રમેયોમાં એકનું પક્ષ બીજાનું સાધ્ય હોય અને
પેહેલાનું સાધ્ય બીજાનું પક્ષ હોય તો તે એ પ્રમેયો એકેકના
વ્યત્યાસ કહેવાય; વ્યત્યાસ એટલે ઉલટા; પાંચમા સિદ્ધાંત
અને છઠ્ઠો વ્યત્યાસ છે એમ તેમની પ્રતિજ્ઞાએ જોવાથી જ-
ણારો; એટલે પાંચમાનું પક્ષ (કર્તા, અથવા આપેલું) તે છઠ્ઠાનું
સાધ્ય (ક્રિયાપદ, માગેલું) છે, અને પાંચમાનું સાધ્ય છઠ્ઠાનું
પક્ષ છે.

છઠ્ઠો સિદ્ધાંત ઉલટ પક્ષનો છે, માટે તેની સિદ્ધતા પણ,
ઉલટી રીતની છે; યુક્તિની ભૂમિતિમાં ધણી વેળાએ વ્યત્યાસ
સિદ્ધાંતો ઉલટ સિદ્ધાંતથીજ સાબિત કર્યા છે. સ્વલટી સિદ્ધતાના
દાખલાતો આપણે ઉપર જોયા; હવે ઉલટી સિદ્ધતા કેવા પ્રકાર-
ની છે તે જોવાનું રહ્યું; ધારો કે એમ સાબિત કરવું છે કે જ

ચોપડી બ કરતાં મોટી છે; તો જો આપણે સિદ્ધ કરિયે કે અ
અને બ બરોબર હોઈ નજ રહે; તેમજ અ ચોપડી બ કરતાં
નહાની પણ હોઈ નજ રહે; તો સ્પષ્ટ છે કે અ ચોપડી બ
કરતાં મોટી હોવી જ નોંધવું. તેમજ ધારો કે અ ખૂણો બ ની
બરોબર છે એવું સિદ્ધ કરવું છે; તો પહેલાં એવું સિદ્ધ કરી
બતાવિયે કે જો અ ખૂણો બ કરતાં મોટો હોય તો કંઈ સ્પષ્ટ
અસંભાવ્યતા નિકળે; તેમજ અ, બ કરતાં નહાનો હોય તો પણ
તેવી જ સ્પષ્ટ અસંભાવ્યતા નિકળે. ત્યારે નક્કી જ સિદ્ધ થયું કે
અ અને બ બરોબર જ હોવા જોઈએ. આ જાતનો પુરાવો
કદાચ શરૂઆતમાં ગુંચવણ જેવો અથવા અનિશ્ચિત જેવો
લાગશે; પણ વિચાર કરતાં જણાશે કે એમાં કંઈ અનિશ્ચિત-
પણું નથી. સૂત્રો પુરાવા જેટલો જ એ મજબૂત પુરાવો છે.
તોપણ જ્યાં સૂધી સૂત્રો પુરાવો મળી આવે છે, ત્યાં સૂધી એવો
પુરાવો વપરાતો નથી.

સિદ્ધાંત ૬. પ્રમેય.

પ્રતિષ્ઠા:—જો એક ત્રિકોણના એ ખૂણાઓ બરોબર
હોય, તો તેઓની સામેની બાજુઓ પણ બરોબર છે.

સાધન.

અવક ત્રિકોણનો અકબ ખૂ-
ણો અવક ખૂણાની બરોબર છે;
તો અબ બાજુ અક બાજુની
બરોબર થશે.

રચના.

જો અવ, અક ની બરોબર
ન હોય તો એ બેમાંની એક બાજુ બીજી કરતાં
મોટી હોવી જોઈએ.



ને એમ બની શકે, તો ધારો કે

અવ બાળુ અક કરતાં મહોટી છે.

તો અવ માંથી વડ ભાગ અક જેટલો કાપો. (૧.૩).

ક, હ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

ડબક વ્યને અવક ત્રિકોણો માં,

ડબ લીટી અક ની બરોબર છે. (૨૨.)

વ્યને વક લીટી બન્ને ત્રિકોણોનાં સાધારણ છે,

વ્યને ડબક ખૂણા અકવ ખૂણાની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

મોટે એક ત્રિકોણની ડબ, વક બાળુઓ વ્યને વ્યન્ત-ખૂણો ડબક બીજાની અક, વક બાળુઓ વ્યને વ્યન્ત-ખૂણો અકવ ની બરોબર વ્યતુક્રમે છે.

મોટે ડબક ત્રિકોણ અકવ ની બરોબર થયો; (૧.૪)

વ્યાખો પોતાના ભાગની બરોબર;

એ વ્યશક્ય છે. (પ્ર. પ્ર.૯)

મોટે વ્યાપણે અવ બાળુ અક કરતાં મહોટી ધારી એ ખોડું;

તેમજ અક બાળુ અવ કરતાં મહોટી હોય એ વ્યશક્ય છે

એમ સિદ્ધ કરી શકીશું.

મોટે અવ બાળુ અક કરતાં મહોટી પણ નથી વ્યને નહાની પણ નથી.

એટલે અવ બાળુ અક ની બરોબર છે.

મોટે ને એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:—જો ત્રિકોણુ સમકોણુ હોય તો તે સમ-
બાજુ છે.

ટીપ:—રચનામાં અથવા મોટામાંથી અક નહાની બરોબરનો
ભાગ કાપ્યો, તે ક્રિયા છેડાથી અથવા કે બંધી તે યાદ રાખવું.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતમાં કેવા પ્રકારની સિદ્ધતા વાપરી છે? તેનું
કારણ શું?

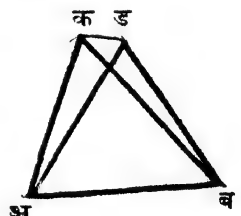
(૨) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણુના પાયા ઉપરના બાજુઓમાં
દ્વિભાગનારી લીટીઓથી જે બીજાં ત્રિકોણુ તેજ પાયા ઉપર
થશે, તે પણ સમદ્વિબાજુ થશે.

સિદ્ધાંત ૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ
દિશાએ બે એવા ત્રિકોણુ થઈ શકે નહિ કે જેઓની તે
પાયાના એક છેડામાં મળતી બે બાજુઓ એકેકને
સરખીજ હોય, અને વળી એકી વખતે બીજા છેડામાં
મળતી બે બાજુઓ પણ એકેકને સરખીજ હોય.

સાધન.

જો એમ બની શકતું હોય
તો એકજ પાયા અથવા ઉપર,
અને તેની એકજ બાજુએ બે
ત્રિકોણુ અકબ અને અડબ
એવા દોરો કે પાયાના અ
બિંદુમાં આવે મળતી તે-



ઓની અક અને અડ બાજુઓ એકેકની બરોબર થાય.

અને વળી જ બિંદુમાં મળતી વક અને વડ બાજુઓ
પણ એકેકની બરોબર જ થાય.

પહેલું—એમ ધારો કે દરેક ત્રિકોણનું શિરોબિંદુ બી-
જા ત્રિકોણની બહાર પડે છે; તો કહ બિંદુઓ સાંધો
(મ્વી. ૧)

સિદ્ધતા.

અકડ ત્રિકોણમાં, અક બાજુ અડની બરોબર છે. (પ્રતિ.)

માટે અકડ ખૂણો અડક ની બરોબર છે. (૧. ૫)

પણ આખો ખૂણો અકડ તેના ભાગ વકડ કરતાં
મોટો છે (પ્ર. પ્ર. ૯),

માટે અડક ખૂણો પણ વકડ કરતાં મોટો છે;

ત્યારે વડક ખૂણો તો વકડ કરતાં ઘણું જ મોટો હોવો
જોઈએ.

પણ વકડ ત્રિકોણમાં,

વક બાજુ વડ ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)

માટે વડક ખૂણો વકડ ખૂણાની બરોબર છે (૧. ૫)

પણ તે તો આપણે વકડ કરતાં ઘણો મોટો છે એવું
ઉપર બતાવ્યું;

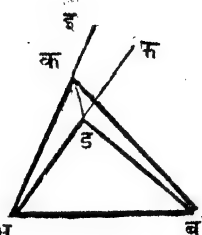
માટે ઉપર પ્રમાણે આકૃતિ દોરવાથી આ અશક્ય
પરિણામ આવ્યું:—કે એક જ ખૂણો બીજા કરતાં મોટો
પણ છે અને તેની બરોબર પણ છે; માટે આપણે જ
ધારણા પ્રમાણે ઉપર બે ત્રિકોણો દોર્યા તે અશક્ય છે;
એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય નહિ.

બીજું—એવું ધારો કે એકનું શિરોબિંદુ ડ બીજા
ત્રિકોણની અંદર પડે છે, તો

રચના.

ક, ડ સાંધો (સ્ત્રી. ૧)
 અને અક, અડ ને ડ, ફ સૂધી
 લંખાવો. (સ્ત્રી. ૨)

સિદ્ધતા.



અકડ ત્રિકોણમાં, અક અ
 બાજુ અડ ની બરોબર છે (પ્રતિ.)

મોટે, પાયાની બીજી બાજુના ખૂણાઓ ઇકડ અને
 ફડક બરોબર છે. (૧. ૫.)

પણ ઇકડ ખૂણો તેના ભાગ વકડ કરતાં મોટો છે
 (પ્ર. પ્ર. ૬),

મોટે ફડક ખૂણો પણ વકડ કરતાં મોટો છે.

ત્યારે વકડ ખૂણો તો વકડ ખૂણા કરતાં ઘણો મોટો
 થયો.

પણ વકડ ત્રિકોણમાં, વક બાજુ વડની બરોબર છે,
 (પ્રતિ.)

મોટે વકડ ખૂણો વકડખૂણાની બરોબર હોવો જોઈએ.
 (૧. ૫.)

પણ તે તો ઉપર આપણે એના કરતાં મોટો છે એમ
 બતાવ્યું;

એ એકેકથી ઉલટી વાત બનવી અશક્ય છે.

ત્રીજું—એકનું શિરોબિંદુ ડ, પહેલા ત્રિકોણની કબ
 બાજુના ઉપર પડે તો દેખીતુંજ અશક્ય છે, કારણ
 કે તેમ હોય તો નહાની લીટી ડવ મોટી લીટી કબ ની
 બરોબર થઈ જાય.

માટે, આપણે જોયું કે એકજ પાયાની એકજ દિ-
શાએ એ એવા ત્રિકોણો દોરવા અશક્ય છે કે જેઓ-
ની ધૃ

પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી—એકજ બિંદુમાં મળતી લીટીઓને સીમાવાસી કહે-
છે. જ્યોતિષનાં મુખ્યત્વેમાં આ સિદ્ધાંત આવતો સિદ્ધાંત
સિદ્ધ કરવા માટેજ લખેલો દેખાયછે. એની સિદ્ધતા જરા
નવાઈ જેવી છે, અને એવી ક્વચિતજ વાપરવામાં આવેછે.
આ સિદ્ધાંતનો સીધો પુરાવો નથી; અને પુરાવામાં શું સ્વલ્પ
પડવાનું કારણ દેખાતું છે કે નકાર વસ્તુ સાબિત કરવી છે;
એટલે એમ બતાવવું છે કે એક અમુક જાતના ત્રિકોણો
થઈ ન શકે. પુરાવો એવી રીતે આપ્યો છે કે, ધારો કે
તેમ થઈ શકે, તો તેથી એક અસંભવિત અનુમાન નિકળશે.
પણ એવું અશક્ય અનુમાન તો સ્વીકારાયજ નહિ; માટે
જે ધારણાને લીધે આવા પરિણામ ઉપર આપણે આવી
પહોંચ્યા તે ધારણા ખોટી હોવી જોઈએ.

ઉપરના સિદ્ધાંતમાં સાબિત કરવું છે કે જેવા ત્રિકોણો કહેલા
છે તેવા દોરી શકાય નહિ. જો એવા દોરી શકાતા હોય તો
દોરો. હવે એવા ત્રિકોણો ત્રણ રીતે દોરી શકાય; માટે
ત્રણ રીતે દોરવા અશક્ય છે એવું સાબિત કીધું છે. જો
એવા ત્રિકોણો દોરી શકાય તો એવું બતાવ્યું છે કે એકને
એકજ ખૂણા એક ખીજા. અમુક ખૂણા કરતાં મોટો પણ
હોવા જોઈએ, અને વળી તેની બરોબર પણ હોવા જોઈએ.
પણ એ તો અશક્ય અનુમાન છે, માટે જે આપણે પહેલાં
સાચું માની લીધું તેમાં ભૂલ કીધી. એક છેડે મળતી બે બા-
જુઓ પણ સરખીજ હોય એ બતાવ્યું અશક્ય છે.

યાદ રાખવું કે ગમે તે એક છેડામાં મળતી બે બાજુઓ
સરખી હોય તો તેમાં કાંઈ બાધ નથી, તેમ તો થઈ શકે;

અક અને અડ સરખી હોઈ શકે, પણ ત્યારે બક અને બડ સરખી થાયજ નહિ.

પ્રશ્નો.

(૧) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ એ સમઠિબાજુ ત્રિકોણો કહાડિયે તો એકનું શિરોબિંદુ બીજાની અંદર પડવું જોઈએ.

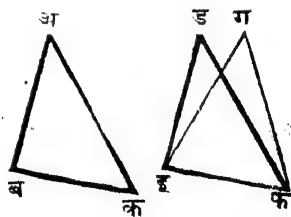
(૨) આ સિદ્ધાંતમાં આપેલી ચાર શરતો જુદી જુદી લખો; અને બતાવો કે તેમાંની એક પણ શરત છોડિયે તો સિદ્ધાંત ખોટા પડી જશે.

સિદ્ધાંત ૮. પ્રમેય.

પ્રતિપાઃ—જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓની પરોપર હોય, અને વળી તેમના પાયા એટલે ત્રીજી બાજુઓ પણ પરોપર હોય, તો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓની વચ્ચેનો અંતર્ધ્રુવો બીજા ત્રિકોણની બે બાજુઓના અંતર્ધ્રુવોની પરોપર થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક અને ડફ
બે એવા ત્રિકોણો છે કે અ, ડ
અક બાજુઓ અનુક્રમે ઇડ,
ડફ બાજુઓની પરોપર
છે; એટલે અ, ઇ ની પ



રોપર, અને અક, ડફની પરોપર; અને બક પાયા
ફ પાયાની પરોપર છે; તો અબક ખૂણે ઇડફ ખૂણા-
ની પરોપર થશે.

સિદ્ધતા.

જો અચક ત્રિકોણુ (ઉચ્ચકીને) હલ્ક ત્રિકોણુ ઉપર
એવા રીતે મુકિયે કે વખિંદુ હ ખિંદુ ઉપર પડે, અને ચક
સીધી લીટી ફક્ની દિશામાં પડે,

તો ક ખિંદુ ફ ખિંદુ ઉપરજ પડશે.

કારણ કે ચક લીટી ફક્ ની અરોઅર છે; (પ્રતિ.)

અને ચક લીટી ફક્ ઉપર પડેછે, માટે

ચક, અક લીટીઓ પણ હલ્ક, હલ્ક ના ઉપરજ પડશે;

કારણ કે, જો તેમ ના પડે, તો ધારો કે તે લીટીઓ
ખીજેજ રથજે, હલ્ક, ગલ્ક ની દિશાએ પડેછે.

હવે હલ્ક અને હલ્ક દરેક અચ ની અરોઅર છે;

અને ફલ્ક, ફલ્ક, દરેક અક ની અરોઅર છે, માટે

હલ્ક લીટી હલ્ક અરોઅર, અને ફલ્ક લીટી ફલ્ક અરોઅર;

(પ્ર. પ્ર. ૧)

ત્યારે તો એકજ પાયા ફલ્ક ઉપર અને તેની એકજ
ખાળુએ એ ત્રિકોણુ હલ્ક, હલ્ક એવા થયા કે હ
ખિંદુમાં મળતી ખાળુઓ સરખી થઈ, અને વળી ફ
ખિંદુમાં મળતી ખાળુઓ પણ સરખી થઈ, એ બનવું
અશક્ય છે, (૧. ૭)

માટે ચક, અક લીટીઓ હલ્ક, હલ્ક ના ઉપરજ પડવી
જોઈએ;

અને ખીજ કોઈ રીતે પડી શકે નહિ.

પણ જો તેમ હોય ત્યારે તો અ ખૂણો હ ના ઉપરજ
પડેયો; એટલે ચક ખૂણો હલ્ક ની અરોઅર છે.

(પ્ર. પ્ર. ૮)

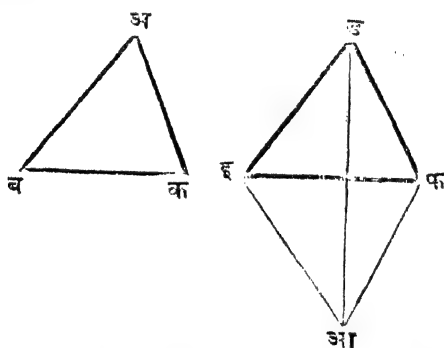
માટે જો એક ત્રિકોણુની એ ખાળુઓ ધૃ

પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત:—ઉપલા સિદ્ધાંત ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે એક ત્રિકોણની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની ત્રણ બાજુઓની બરાબર હોય તો તે ત્રિકોણો પણ એકેકની બરાબર છે.

ટીપ:—ઉપલી સિદ્ધતાનો આધાર પણ ઉલટ પુરાવા ઉપર રહેલો છે; અને વળી ૭ માં સિદ્ધાંતની સહાયથી સિદ્ધ થયો છે, જે સિદ્ધાંત સમજાવો જરા કઠિન છે, માટે એવો સિદ્ધાંત નીચેની રીતે પણ સિદ્ધ થઈ શકે છે.

\triangle અબક ને \triangle હકફ ઉપર એવી રીતે શ્રેકો છે કે બિંદુ ઇ



ઉપર પડે; અને બક લીટી ફક ની દિશાએ પડે; અને તેનું અ શિરોબિંદુ ફક પાયાની બીજી બાજુ ઉપર પડે.

હવે બક લીટી ફક ની બરાબર છે, માટે ક બિંદુ ફ ઉપર જ પડશે.

ત્યારે અબક ત્રિકોણ ફઆફ સ્થલે પડશે.

હઆ સંધિ. ફઆ=અબ (રમ.)

પણ ફહ=અબ (પ્રતિ.) ∴ ફઆ=ફહ (પ્ર. પ્ર. ૧)

∴ <હડઆ = <હઆડ (૧.૫)

તેમજ ડફ બરૌબર આફ ∴ <આડફ = <ફઆડ.

∴ આખો ખૂણો હડફ = હઆફ (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ <હઆફ = <બઅક (પ્રતિ.) ∴ <હડફ = <બઅક.

પ્ર. સિ.

જો ક અને ક ખૂણા પહેાળા ખૂણા હોય તો હઆ લીટી ત્રિકોણની બહાર પડશે, અને તેઓ કાઠખૂણા હોય તો ડફ અને કઆ જોડાઈને હઆ થશે; પણ સિદ્ધતા તો ઉપર પ્રમાણેજ રહેશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમબાજુ ચતુષ્કોણનો કણું જે ખૂણાઓ સાંધે છે તે ખૂણાને દ્વિભાગે છે.

(૨) એક સમબાજુ ચતુષ્કોણના કણું એકેકને દ્વિભાગે છે અને એકેક ઉપર લંબ છે.

(૩) સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ તેના શિરોબિંદુ સાથે એક લીટીથી સાંધ્યું તો તે લીટી શિરોબિંદુને તથા ત્રિકોણને દ્વિભાગશે અને પાયા ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધાંત ૯. કૃત્ય.

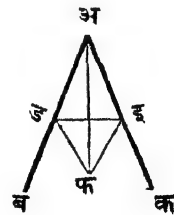
પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલા સીધીલીટીખૂણાને દ્વિભાગવો, એટલે તેના બે સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે બઅક આપેલો ખૂણો છે; તેને દ્વિભાગવો છે.

રચના.

અબ લીટીમાં એક ડ બિંદુ લો;



અને અક લીટીમાંથી અહ ભાગ અહ યરોયર
કાપો. (૧.૩)

હ અને હ સાંધો (સ્વી.૧)

અને હ લીટી ઉપર અ યિદુની સામેની તરફ એક
સમખાળૂ ત્રિકોણુ ડફદ દોરો. (૧.૧)

અ અને ક સાંધો (સ્વી.૧)

તો અક લીટી વચ્ચે ખૂણાને દ્વિભાગરો.

સિદ્ધતા.

હઅક અને હઅક ત્રિકોણોમાં હઅ લીટી હઅ ની યરો-
યર છે. (૨ચ.)

અને અક અને માં સાધારણુ છે.

અને ત્રિજી ખાળૂ હક ત્રિજી ખાળૂ હકની યરોયર
છે. (૨ચના)

માટે હઅક ખૂણો હઅક ખૂણાની યરોયર છે. (૧.૮)

માટે આપેલા ખૂણા વચ્ચે ના અક લીટીથી એ સર-
ખા ભાગ થયા.

ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) એજ આકૃતિમાં બતાવે છે અક લીટી ડફદ ખૂણા પણ
દ્વિભાગેછે.

(૨) એક આપેલા ખૂણાના ચાર સરખા ભાગ કરો.

(૩) જો ડફદ ત્રિકોણુ એ રિશૈયિદુવાળી ખાળૂએ કહાડ્યો
હોય તો પણ સિદ્ધાંત સિદ્ધ થઈ શકેછે.

(૪) પણ તેમ કરતાં એક અમુક પ્રસંગે બાધ આવેછે તે
ક્યારે?

(૫) જો સમખાળૂ ત્રિકોણુ આકૃતિમાં ન કહાડતાં ફક્ત સમ-
દ્વિખાળૂ ત્રિકોણુજ પાયા ઉપર કહાડયો હોય તો આ કૃત્ય સિદ્ધ
થાય કે નહિ?

સિદ્ધાંત ૧૦. કૃત્ય.

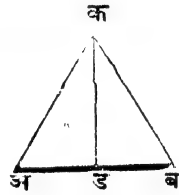
પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી વ્યન્તવાન સીધી લીટીને કુ-
લાગવી એકલે તેના એ સરખા ભાગ કરવા.

સાધન.

ધારો કે અબ આપેલી સીધી લી-
ટી છે;

તેના એ સરખા ભાગ કરવાના છે.

રચના.



અબ લીટી ઉપર એક સમખાળૂ ત્રિકોણુ અબક દોરો.
(૧.૧)

અને અકબ ખૂણાને કડ લીટીએ કુલાગો. (૧.૯)

એ લીટી અબ ને ડ બિંદુમાં મળે છે.

તો અબ લીટીને ડ બિંદુ કુલાગશે.

સિદ્ધતા.

અકડ અને બકડ ત્રિકોણોમાં

અક લીટી બકની બરોબર છે, (રચના)

અને કડ લીટી બન્નેમાં સાધારણ છે,

અને અકડ વ્યન્તખૂણો બકડ વ્યન્તખૂણાની બ-
રોબર છે. (રચના)

માટે એ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે.

માટે જડ પાયો જડ ની બરોબર છે. (૧.૪)

માટે જ બિંદુમાં આપેલી લીટીના બે સરખા ભાગ થયા. કૃ. કૃ.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના શિરૈર્બિંદુના ખૂણાને દુભાગનારી લીટી પાયાને પણ દુભાગશે.

(૨) એક આપેલા પાયા ઉપર એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ એવો દોરો કે તેની સમબાજુઓનો સર્વાંગો એક આપેલી લીટીની બરોબર થાય.

(૩) એક આપેલી અન્તવાન સીધી લીટીના આઠ સરખા ભાગ કરો.

(૪) આપેલી લીટીના પ્રત્યેક છેડાને મધ્યબિંદુ અને આપેલી લીટીને ત્રિજ્યા ધારીને બે વર્તુલો દોરો; તે બે બે બિંદુઓમાં એ વર્તુલો એકેકને છેદેછે તે તે બિંદુઓ સાંધવાથી આપેલી લીટી દુભાગારો.

(૫) ઉપલા પ્રશ્નમાં દુભાગનારી લોટી આપેલી લીટીને લંબ છે.

(૬) જે ચતુષ્કોણાકૃતિના કણે એકેકને દુભાગે અને એકેક ઉપર લંબ હોય તે આકૃતિ સમબાજુ હોવી જોઈએ.

(૭) એક અન્તવાન સીધી લીટીને એવી લંબાવો કે લંબાવેલો ભાગ તે આખી લંબાયેલી લીટીને ત્રિજ્યા ભાગ થાય.

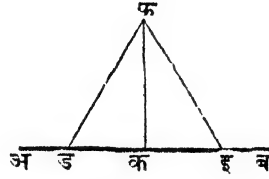
સિદ્ધાંત ૧૧. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તે લીટીમાં એક આપેલા બિંદુમાંથી લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે અવ વ્યાપેલી
લીટી છે, અને તેમાં ક
વ્યાપેલું બિંદુ છે.

ક બિંદુમાંથી એક લીટી
અવ ઉપર લંબ દોરવાની છે.



રચના.

અક માં એક ડ બિંદુ લો; અને કવ માંથી કઈ લીટી
કડ બંધો અને કાપો. (૧. ૩)

કઈ લીટી ઉપર એક સમબાળ ત્રિકોણુ ડફફ દોરો.
(૧. ૧)

કક માંધો;

ત્યારે કક લીટી અવ ઉપર લંબ થશે.

સિદ્ધતા.

ડકક અને ડકક ત્રિકોણુમાં, ડક લીટી ડક ની
બંધોબંધ છે. (રચના)

અને કક બંધોમાં સાધારણ છે,

અને ત્રિજ્યા બાળુ ડક ત્રિજ્યા બાળુ ડક ની
બંધોબંધ છે; (રચના)

માટે ડકક ખૂણા ડકક ખૂણાની બંધોબંધ છે. (૧. ૮)

અને વળી તેઓ પાસપાસેના ખૂણા છે,

પણ બંધો એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસ-
પાસેના ખૂણા સરખા કરે ત્યારે તે દરેક ખૂણાને કાટ-
ખૂણો કહે છે. (બા. ૧૦)

માટે ડકક અને ડકક દરેક કાટખૂણો છે.

માટે કફ લીટી અવ ઉપર લંબ છે, અને તે કાળિદુ-
માંથી દોરી છે.

કુ. કુ.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં બતાવે છે કફ માં અથવા તેને લંબાવીને તેમાં કોઈ પણ બિંદુ લઈએ તો તે હ અને ક બિંદુ-
ઓથી સરખે અન્તરે છે.

(૨) જો આપેલું બિંદુ લીટીને છોડે હોય તો સિદ્ધાંતમાં કાચેલી રચના ઉપરાંત શી રચના કરવી જોઈએ?

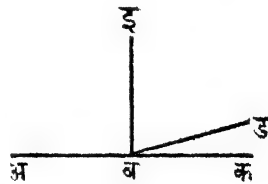
(૩) એકજ બિંદુમાંથી આવી લંબ કેટલી દોરી શકાય ?

(૪) એક સમબાજુ ત્રિકોણની બે બાજુઓ દુભાગીને તે બિંદુઓમાંથી તે બાજુઓને બે લંબ દોરો; જો બિંદુમાં તે લંબો મળે છે તેને ત્રિકોણના ત્રણ શિરોબિંદુ સાથે સાંધો; તો તે ત્રણ સાંધનારી લીટીઓ સરખી થશે.

(૫) બતાવો કે આ સિદ્ધાંત નવમા સિદ્ધાંતનો એક દૃષ્ટાંત છે.

ટીપ્પણી:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એવું અનુમાન થઈ શકે છે કે બે સીધી લીટીઓને એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે
બે સીધી લીટી અવક અને અવડ
ને એક સામાન્ય ખંડ અવ છે.
તો બે બિંદુમાંથી બંન્ને લીટી અવ
ને લંબ દોરો (૧. ૧૧)



માટે $\angle અવહ = \angle કવહ$ (૦યા. ૧૦) કારણકે અવક
એકજ લીટી છે. તેમજ $\angle અવહ = \angle કવહ$ (૦યા. ૧૦)

કારણકે અવડ એકજ લીટી છે. $\therefore \angle કવહ = \angle કવક$
(પ્ર. પ્ર. ૧)

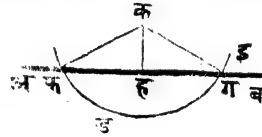
મોટા ખૂણા નહાનાની યરોબર, એ અસાધ્ય છે. મોટે એ સીધી લીટીને એક સામાન્ય ખંડ હોઈ શકે નહિ.

સિદ્ધાંત ૧૨. કુલ્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક વ્યાપેલી અમર્યાદ સીધી લીટી ઉપર તેની બહારના એક વ્યાપેલા બિંદુમાંથી એક લંબ દોરવી.

સાધન.

ધારો કે અબ એક એવી સીધી લીટી છે કે બન્ને બાજુએ લંબાવી શકાય; અને ક તેની બહાર વ્યાપેલું બિંદુ છે. તો ક બિંદુમાંથી એક લીટી અબ ને લંબ દોરવી છે.



રચના.

વ્યાપેલી લીટીની બીજી બાજુએ એક ક બિંદુ લો ;
ક મધ્યબિંદુ અને કડ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ
ફગઈ દોરો (૨વી. ૩)

અને ધારો કે તે વ્યાપેલી લીટીને ક અને ગ બિંદુમાં
છેદે છે.

ફગ ને હ બિંદુમાં દુભાગો; (૧.૧૦)

કહ સાંધો;

તો કહ લીટી અબ ઉપર લંબ થશે.

કફ અને કગ સાંધો.

ફહક અને ગહક ત્રિકોણોમાં,

ફહ લીટી ગહ ની યરોબર છે; (૨મ.)

અને હક બન્નેમાં સાધારણ છે;

અને ત્રિજી બાજુ કફ ત્રિજી બાજુ કગ ની યરોબર
છે (૦યા. ૧૫),

કારણ કે એકજ વર્તુલની એ ત્રિજ્યાઓ છે;

મોટે કહક ખૂણો કહક ખૂણાની યરોયર છે. (૧૮)
અને તે ખૂણા પાસપાસેના છે;

પણ જ્યારે એક લીટી બીજી ઉપર ઉભી રહીને પાસ-
પાસેના ખૂણા એકેકની યરોયર કરેછે, ત્યારે દરેક
ખૂણો કાટખૂણો હોવો જોઈએ, મોટા આગળના બન્ને
ખૂણા કાટખૂણા છે. મોટે આપેલા ક બિંદુમાંથી, કહ
લીટી અચ ને લંબ દોરી. કૃ. કૃ.

ટીપ્પણ—આપેલી લીટી અમર્યાદ હોવી જોઈએ; કે જે વર્તુલ
દોરાય તેને બે બિંદુઓમાં છેદવા મોટે દરેક બાજુએ તે લીટી
લંબાવી શકાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ
ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજુને દ્વિભાગે, તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિ-
બાજુ હોવો જોઈએ.

(૨) એક ત્રિકોણના દરેક શિરોબિંદુમાંથી સામેની બાજુ-
ઓ ઉપર દોરેલી લંબ તે બાજુઓને દ્વિભાગે તો તે ત્રિકોણ
સમબાજુ હોવો જોઈએ.

(૩) એક સમબાજુ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ અને સામેની
બાજુનાં મધ્યબિંદુ સાંધનારી લીટીઓ સમ હોવી જોઈએ.

(૪) એક અમર્યાદ લીટી અને તેની બહારના એક બિંદુ
વચ્ચેના અંતર કેમ કહાડવો?

પરચૂરણ પ્રશ્નો (સિદ્ધાંત ૧-૧૨.)

૧. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના પાયામાં બે બિંદુઓ
બન્ને છેડેથી સમાન્તર આપ્યાં છે; તો બતાવો કે તે બિંદુઓ તે
ત્રિકોણના માથાના શિરોબિંદુથી પણ સરખેજ અંતરે છે.

૨. એક ચતુષ્કોણકૃતિની સામસામેના બાજુઓ ખરોખર હોય તો સામસામેના ખૂણા પણ ખરોખરજ થશે.

૩. અબક એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ છે, જેમાં અબ=અક; બ અને ક ખૂણાને બે લીટીઓ દુભાગેછે; અને તે લીટીઓ ડ બિંદુમાં મળેછે; તો ડઅ લીટી વઅક ખૂણાને દુભાગશે.

૪. એક સમબાજુ ત્રિકોણની દરેક બાજુને દુભાગીને તે ત્રણ બિંદુઓને સાંધતાં જે ત્રિકોણ થાય તેપણ સમબાજુજ થશે.

૫. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અબક ની અબ અને અક સરખી બાજુઓ અ ખૂણાની પાર વધારી, અને તેમાં બે બિંદુઓ એવાં લીધાં કે અબ=અક; ફવ અને ફક બિંદુઓ સાંધ્યાં; તો ફવ=ફક થશે.

૬. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ અબક ની અબ અને અક સરખી બાજુઓમાં બે બિંદુઓ કષ અને ચ એવાં લીધાં કે અબ=અચ; અને કકષ અને કચ સાંધ્યાં, તો ડ બિંદુમાં એકેકને છેદેછે; તો

(૧) વડક ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ થશે,

(૨) અડ લીટી વઅક ખૂણાને દુભાગશે;

(૩) અને અડ લંબાવીશું, તો વક ને દુભાગશે અને તે ઉપર લંબ થશે.

૭. એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો પાયો, અને માથાના શિરોબિંદુ ઉપરથી પાયા ઉપર દોરેલી લંબ આગેલાં છે; તો તે ત્રિકોણ બનાવો.

૮. એક આપેલી સીધી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહો કે તે લીટીની એકજ બાજુએ આપેલાં બે બિંદુઓથી સરખે અંતરે હોય.

૬. ઉપલાજ પ્રશ્નમાં આપેલાં બિંદુઓ લીટીની જુદી જુદી બાજુએ લે.

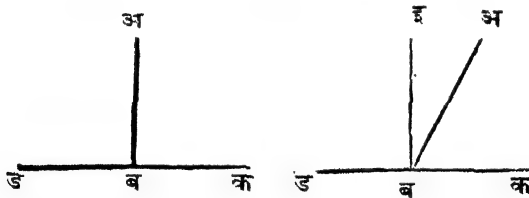
૧૦. અવક ત્રિકોણમાં અવક ખૂણા સાંકડા ખૂણા છે; તો અવકમાં અથવા તેને લંબાવતાં જે લીટી થાય તેમાં એક જ બિંદુ એવું શોધી કહો કે બડ=કડ.

સિદ્ધાંત ૧૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી સીધી લીટી ઉપર પડીને તેની સાથે ખૂણા કરે, તો તે બે ખૂણા કાટખૂણા હોવા જોઈએ. અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરાબર હોવા જોઈએ.

સાધન.

ધારો કે અવ સીધી લીટી કડ સીધી લીટી ઉપર પડે છે;



તો પાસપાસેના ખૂણા અવક, અવક બે કાટખૂણા થશે; અથવા તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણાની બરાબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) કારણ કે જો એ બે ખૂણા (આ. ૧) એકેકની બરાબર હોય તો તો દરેક એક કાટખૂણો હોવો જોઈએ; (વ્યાખ્યા ૧૦).

(૨) પાણુ જો ડબ્બા ખૂણો અવક ખૂણાની યરોબર ન હોય, (આ. ૨), તો જ બિદુમાંથી જઈ લીટી કડ ઉપર લંબ દોરો; (૧.૧૧)

ડબ્બા ખૂણો એ ખૂણા ડબ્બા, ડબ્બા થી બનેલો છે.

માટે ડબ્બા ખૂણો તે એ ખૂણાની યરોબર થયો. (પ્ર. પ્ર. ૮)

એ સમાનતામાં અવક ખૂણો ઉમેરો;

તો એ ખૂણા ડબ્બા બને અવક તે ત્રણ ખૂણા ડબ્બા, ડબ્બા બને અવક ની યરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

વળી ડબ્બા ખૂણો ડબ્બા બને અવક ખૂણાઓથી થયેલો છે; બને તે માટે તેઓની યરોબર છે;

એ દરેકમાં ડબ્બા ખૂણો ઉમેરો;

તો ડબ્બા બને ડબ્બા ખૂણા તે ત્રણ ખૂણા ડબ્બા, ડબ્બા, બને અવક ની યરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પાણુ બિજા ત્રણ ખૂણા તો એ ખૂણા ડબ્બા, અવક ની યરોબર છે એમ સિદ્ધ કરીધું; માટે ડબ્બા, અવક ખૂણા ડબ્બા, ડબ્બા ખૂણાની યરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

પાણુ ડબ્બા, ડબ્બા ખૂણા તો એ કાઠખૂણાની યરોબર છે; (આ. ૧૦)

માટે ડબ્બા, અવક ખૂણાપણુ બન્ને મળીને એ કાઠખૂણાની યરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧) પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—પ્રતિમા તપાસી જોતાં જણાશે કે એ લીટીઓ એકેક સાથે મળીને એકજ સીધી લીટી થઈ જાય, અથવા એકને છેડે બીજો છેડો મળી જાય, એવી એ લીટીઓના વિચાર આ સિદ્ધાંતમાં કરવાનો નથી.

આ સિદ્ધાંતમાં એમ સાબિત કરવાનું છે કે જે ખૂણા થશે તે દરેક એકેક કાટખૂણા થશે; અથવા તો તે જે ખૂણા મળીને જે કાટખૂણા બરોબર થશે.

વળી એ પણ સ્પષ્ટ છે કે એક લીટીને ખીજી એકજ લીટી ન મળે, પણ ઘણીક લીટીઓ એકજ બિંદુ આગળ મળે તો જોડલા ખૂણા થશે તે બધા મળીને પણ જે કાટખૂણા બરોબરજ થશે. એ ઉપસિદ્ધાંતની આકૃતિ દોરવાથી સમજણ બધારે પડશે.

બ્યાખ્યા (૧) જ્યારે જે ખૂણાઓનો સર્વાંગો જે કાટખૂણા બરોબર હોય, ત્યારે તેઓ ન્યૂનતાપૂરક છે. એમ કહેવાય છે; અને તેમાંનો એક ખૂણા ખીજનો ન્યૂનતાપૂરક સ્વૂળો કહેવાય.

(૨) જો જે ખૂણાઓનો સર્વાંગો એક કાટખૂણા બરોબર હોય તો તેઓ કોઈ સ્વૂળા કહેવાય છે; અને એક ખૂણા ખીજનો કોઈ કહેવાય.

પ્રશ્ન.

(૧) એક ત્રિકોણના પાયાને બન્ને બાજુએ લંબાવતાં જે ખૂણા થાય તે સરખા હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ હોવો જોઈએ.

(૨) એક લીટી ખીજી લીટી સાથે જો જે ખૂણા કરે છે તે બન્નેને દુભાગિયે તો દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૩) ઉપરનો પ્રશ્ન ધણે અગત્યનો છે. તે આવી રીતે પણ લખાય:—

એક ખૂણાને અંદરથી અને બહારથી દુભાગનારી લીટીઓ એકેકને લંબ છે.

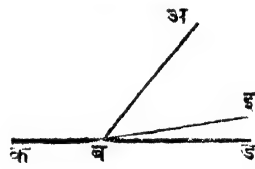
(૪) દુભાગનારી દરેક લીટી સાથે આપેલી લીટીઓ જો ખૂણા કરે છે તે ન્યૂનતાપૂરક છે.

સિદ્ધાંત ૧૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ સીધી લીટીને એકજ બિંદુ વ્યાગળ પણ વિરૂદ્ધ બાજુઓ તરફ એ બીજી સીધી લીટીઓ મળીને જે પાસપાસેના ખૂણાઓ કરે તેઓનો સર્વાળો જો એ કાટખૂણા બરોબર હોય, તો તે એ સીધી લીટી-ઓથી એકની એકજ વ્યખંડ સીધી લીટી થશે.

સાધન.

અવ સીધી લીટીના જ બિંદુ વ્યાગળ વક્ર વ્યને વડ એ સીધી લીટીઓ વિરૂદ્ધ દિશા-
એથી વ્યાપીને અવક, અવડ
ખૂણા એ મળીને એ કાટખૂણા
બરોબર કરેછે; તો વક્ર વ્યને
વડ લીટીઓ મળીને એકની
એકજ વ્યખંડ સીધી લીટી થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે, જો વડ લીટી વક્ર લીટીની સાથે એકજ વ્યખંડ સીધી લીટીમાં ન હોય, વ્યને જુદીજ લીટીમાં હોઈ શકે, તો એમ ધારો કે કવને લંબાવતાં તે વડ દિશામાં નહિ, પણ વડ દિશામાં જશે.

તો કવજ એકજ સીધી લીટી;

વ્યને તેને અવ લીટી મળેછે;

માટે પાસપાસેના ખૂણાઓ અવક, અવડ એ મળીને એ કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૧૩)

પણ અવક વ્યને અવડ ખૂણાઓ પણ એ મળીને એ કાટખૂણા બરોબર છે. (પ્રતિ.)

મોટે અબક, અબહ ખૂણા મળીને અબક વ્યને અબહ
ખૂણાની યરોયર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

એ સરખા ખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો અબક બાદ
કરો;

તો બાકીનો ખૂણો અબહ બાકીના ખૂણા અબહ ની
યરોયર છે. (પ્ર.પ્ર.૩)

એટલે વ્યાખો ખૂણો તેના ન્હાના ભાગની યરોયર
છે; એ વ્યશક્ય છે. (પ્ર.પ્ર.૬)

મોટે વકને લંબાવીશું તો વહ ની દિશામાં જશે નહિ;
વ્યને એવીજ રીતે વ્યાપણે સિદ્ધ કરી શકીશું કે વહ
શિવાય કોઈપણ દિશામાં વકને લંબાવવી વ્યશક્ય છે;
મોટે વક વ્યને વહ વ્યને મળીને એકજ વ્યખંડ સીધી
લીટીમાં હોવી જોઈએ. મ્. સિ.

ટીપ્પણ:—(૧) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો અથવા સાબિતી ૭ મા
સિદ્ધાંતના જોવી છે. પ્રતિજ્ઞામાં કહ્યા પ્રમાણે જો એ લીટીઓ
ત્રિજીને મળે તો તે એ મળીને એકજ સીધી લીટીમાં હોવી
જોઈએ. જો એમ ધારિયે કે તેમ નથી, તો એવાં અનુમાનનું
છેવટ અશક્ય આવેછે; મોટે એવું વિરૂદ્ધ અનુમાન બોદું.

(૨) આ સિદ્ધાંત તેરમાથી ઉલટો છે.

પ્રશ્નો.

(૧) એજ સિદ્ધાંત હવે લીટી ૬ બિંદુ પાર વધારીને સા-
બિત કરો.

(૨) પ્રતિજ્ઞામાં વિરૂદ્ધ શબ્દ લખ્યો અવશ્ય છે તે બ-
તાવો; એકજ બાજુએ એવી લીટીઓ મળી શકે કે કેમ ?

(૩) એક સમખાળુ ચતુષ્કોણની એક કાણુ દુભાગીને તે બિ-
દુમાંથી સામેના બંને ખૂણા સ્પર્ધી બે લીટીઓ દોરિયે તો તે બે
લીટી એકજ સીધી લીટીમાં છે.

સિદ્ધાંત ૧૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જે બે સીધી લીટીઓ એક બીજીને છેદે તો
સામસામેના ખૂણા બરોબર થશે.

સાધન.

ધારો કે અબ વ્યને કડ સીધી લીટીઓ એક બીજીને દ
બિદુમાં છેદેછે;

તો અહક ખૂણો હકબ ખૂ-
ણાની બરોબર થશે.

વ્યને કહક ખૂણો અહક ખૂ-
ણાની બરોબર થશે.



સિદ્ધતા.

અહ લીટી કડ લીટી સાથે પાસપાસેના ખૂણા કહક,
અહક કરેછે; માટે તે બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા
બરોબર છે. (૧.૧૩)

વ્યને વળી હક લીટી અબ લીટીની સાથે અહક, હકબ
ખૂણા કરેછે; માટે તે બે ખૂણા મળીને પણ બે કાટખૂણા
બરોબર છે.

માટે કહક, અહક ખૂણાઓ અહક, હકબ ખૂણાઓની
બરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૧)

એ સમખૂણાઓમાંથી સાધારણ ખૂણો અહક બાદ
કરો;

તો બાકી રહેલો ખૂણો કાઝ બાકી રહેલા ખૂણા ડહબ-
ની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩)

એજ પ્રમાણે બહક ખૂણો ગઢક ખૂણાની બરોબર
સિદ્ધ થઈ શકે.

મોટે જો બે સીધી લીટીઓ ધૃ. પ્ર. સિ.

ઉપસિદ્ધાંત ૧. આ ઉપરથી સ્પષ્ટ છે કે જો બે સીધી લીટી-
ઓ એક ખીજને છેદે, તો છેદવાના બિંદુ આગળ જો ખૂણા-
ઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાઠખૂણાની બરોબર છે.

ઉ. સિ. ૨. તેમજ ગમે એટલી સીધી લીટી ઓ એકજ
બિંદુ આગળ એકેકને છેદે તો તે બિંદુ આગળ જોટલા ખૂણા-
ઓ થાય તે બધા મળીને ચાર કાઠખૂણાની બરોબર છે.

ટીપ્પણી:—(૧) આ સિદ્ધાંતને સંક્ષેપમાં બતાવિયે, તો એમ
કહેવાય કે, સામસામેના ખૂણાઓનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો સા-
ધારણ છે તેથી તે ખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) આ સિદ્ધાંત ખૂણાની વ્યાખ્યાનો માત્ર વધારે છે.
એમ કહી શકાય. બે સીધી લીટીઓ એક ખીજને
મળે ત્યારે તેઓની વચ્ચેનો કોણ તે એક ખૂણો થયો, પણ તે
ખૂણાના શિરોબિંદુની પાર તે લીટીઓને વધારિયે તોપણ તે
ખૂણો કોઈ બદલાતો નથી, એવું આ સિદ્ધાંતમાં બતાવ્યું છે.

૩મું.

(૧) આ સિદ્ધાંતના ઉલટ પક્ષની પ્રતિમા લખો, અને તે
સિદ્ધ કરો.

(૨) ઉપલા બે ઉપસિદ્ધાંતોની આકૃતિ દોરો, અને સિદ્ધ
કરો.

(૩) અરસ્પરસ છેદનારી બે લીટીઓના કોણપણ સા-
મસામેના ખૂણાઓને દુભાગનારી બે લીટીઓ એકજ
અખંડ સીધી લીટીમાં હોવી જોઈએ.

(૪) એક ખૂણાના શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાઓની બન્ને બાજુઓ ઉપર લંબ દોરી, તો તે બે લંબોની વચ્ચેના ખૂણા આપેલા ખૂણાની બરાબર થશે, અથવા તે ખૂણાનો ન્યૂનતાપૂરક ખૂણો થશે.

(૫) જો ચતુષ્કોણની કણી એકેકને દુભાગે તેની સામસામેની બાજુઓ બરાબર છે.

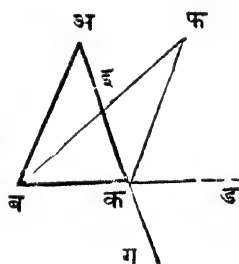
(૬) એક ત્રિકોણની અંદર એક બિંદુ લઈને તેને ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણા સાથે જોડીએ, તો તે બિંદુ આગળના ખૂણા બધા મળીને ચાર કાઠખૂણાની બરાબર થશે.

સિદ્ધાંત ૧૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો કોઈ ત્રિકોણની એક બાજુને લંબાવી તો બહારનો ખૂણો માંહેના સામસામેના ખૂણા માંહેલા કોઈ પણ એક કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

અવક એક ત્રિકોણ છે; જેની બક બાજુ ઉ બિંદુ સુધી લંબાવી; તો બહારનો ખૂણો અકડ માંહેના સામસામેના કબઅ, બઅક દરેક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.



રચના.

અક બાજુને ક બિંદુ માં દુભાગો; (૧. ૧૦)
 બક સાંધો; અને તેને ક બિંદુ સુધી લંબાવો, અને
 ક લીટી બક લીટી જેટલી કરો. (૧. ૩)

કક બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અહવ, કફ ત્રિકોણોમાં, અહ લીટી કફ ની યરો-
યર છે; (૨૨.)

અને હવ લીટી કફની યરોયર છે, (૨૨.)

અને અહવ ખૂણો સામેના ખૂણો કફ ની યરો-
યર છે, (૧. ૧૫)

માટે અહવ ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે કફ ત્રિકોણની યરો-
યર છે. (૧. ૪)

માટે બઅ ખૂણો કફ ખૂણાની યરોયર છે.

પણ કકડ ખૂણો કફ ખૂણો કરતાં મ્હોટો છે;

માટે કકડ ખૂણો બઅ ખૂણો કરતાં પણ મ્હોટો છે.

એટલે બહારનો ખૂણો અકડ માંહેલા ખૂણો અવક
કરતાં મ્હોટો છે.

એવીજ રીતે, જો વક ને દુભાગીને અક લીટી ગ ખિદુ
સૂધી વધારીશું, તો વકગ ખૂણો અવક ખૂણો કરતાં
મ્હોટો સિદ્ધ કરીશું.

પણ વકગ ખૂણો તો અકડ ખૂણાની યરોયર છે; (૧. ૧૫)

માટે અકડ ખૂણો પણ અવક ખૂણો કરતાં મ્હોટો છે.

માટે જો કોઈ ત્રિકોણની ધં

પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) અકડ ખૂણો અવક કરતાં મ્હોટો છે તે આકૃતિ
દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ અ આગળનો બહારનો ખૂણો અ ખૂણો
કરતાં મ્હોટો છે તે સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ત્રિકોણનો પ્રત્યેક ખૂણો ખીજા ખૂણામાં માંહેલા હરેકના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણા કરતાં ન્હાનો છે.

(૪) એક ત્રિકોણમાં એક ખૂણો કાટખૂણો અથવા પહોળો ખૂણો હોય તો ખીજા ખૂણા સાંકડા હોવા જોઈએ.

(૫) એક બહારના બિંદુમાંથી એકજ સીધી લીટી ઉપર બે લંબ દોરી શકાય નહિ.

(૬) એક સમબાજુ ત્રિકોણની એક બાજુ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો અંદરના પ્રત્યેક ખૂણા કરતાં મોટો હોવો જોઈએ, તથા તે ખૂણો પહોળો ખૂણોજ હોવો જોઈએ.

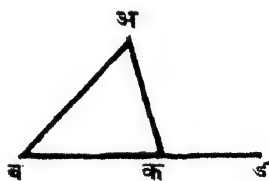
(૭) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણના સરખા ખૂણામાં સાંકડા ખૂણોજ હોવા જોઈએ.

સિદ્ધાંત ૧૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક ત્રિકોણના કોઈપણ બે ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા કરતાં વ્યોછા છે.

સાધન.

અવક એક ત્રિકોણ છે; તો તેના કોઈપણ બે ખૂણા, જેવાકે અવક, અકવ બન્ને મળીને બે કાટખૂણા કરતાં વ્યોછા છે.



રચના.

અવક બાજુને ડ બિંદુ સુધી લંબાવો.

સિદ્ધતા.

અવક ખૂણો અવક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો છે, માટે તે માંહેલા સામેના ખૂણા અવક કરતાં મોટો છે.

(૧. ૧૬)

એ દરેક ખૂણામાં અકબ ખૂણો ઉમેરો;
ત્યારે અકબ, અકબ ખૂણાઓ અકબ, અકબ ખૂણાઓ
કરતાં મોટા છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ પાસપાસેના અકબ, અકબ ખૂણાઓ બે કાટખૂ-
ણાની બરોબર છે, (૧. ૧૩)

મોટે અકબ, અકબ ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણાઓ
કરતાં ઓછા છે.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકશે કે હરકોઈ બે ખૂણાઓ
મળીને બે કાટખૂણા કરતાં ઓછા છે.

મોટે જો એક ત્રિકોણના કોઈ પણ ધ્રુવ પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—(૧) આ સિદ્ધાંત ૧૬ માંના માત્ર ઉપસિદ્ધાંતજ છે.

(૨) સિદ્ધાંત ૧૬-૧૭ બન્ને ૩૨ માં સિદ્ધાંતમાં સમાઈ જાય છે,
તે તે સિદ્ધાંતની પ્રતિમા વાંચવાથી જણાશે.

(૩) આ સિદ્ધાંત ઉપરથી જણાય છે કે કોઈપણ ત્રિકોણમાં
ઓછામાં ઓછા બે સાંકડા ખૂણા તો હોવાજ જોઈએ.

(૪) આ સિદ્ધાંત ૧૨ પ્રત્યક્ષ પ્રમાણેના ઉલટ પક્ષ છે.

પ્રશ્નો.

(૧) આ સિદ્ધાંતની અંતે બારમા પ્રત્યક્ષ પ્રમાણની પ્રતિ-
માઓ એવી રીતે લખો કે તે ઉપરથી એક ખીજના ઉલટ
પક્ષ છે તે દેખાઈ આવે.

(૨) ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુને સામેની બાજુના કોઈપણ
બિંદુ સાથે સાંધીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) જો એક ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાજુઓ લંબાવી તો
બહારના બે ખૂણાઓ બે કાટખૂણા કરતાં વધારે થશે.

(૪) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી એક લંબ પાયા
ઉપર દોરી, તો તે લંબ ત્રિકોણની અંદર ક્યારે પડશે અને
બહાર ક્યારે પડશે?

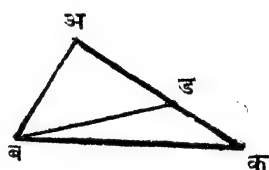
સિદ્ધાંત ૧૮. પ્રમેય.

પ્રતિપાઃ—કોઈપણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજુ બીજી કરતાં મોટી હોય તો મોટી બાજુની સામેનો ખૂણો નહાની બાજુની સામેના ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક એક ત્રિકોણ છે, જેની અક બાજુ અવ કરતાં મોટી છે.

તો અબક ખૂણો અકવ ખૂણા કરતાં મોટો થશે.



રચના.

મોટી અક માંથી નહાની અવ જેટલો એક ભાગ અડકાપો; (૧.૩)

બડ સાંધો.

સિદ્ધતા.

અબડ ત્રિકોણમાં અવ બાજુ અડ ની પરોપર છે, માટે અબડ ખૂણો અડવ ખૂણાની પરોપર છે. (૧.૫)

પણ બડક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો અડવ માંહેલા ખૂણા ડકવ એટલે અકવ કરતાં મોટો છે;

માટે અબડ ખૂણો પણ અકવ ખૂણા કરતાં મોટો છે; ત્યારે અબક ખૂણો તો અકવ ખૂણા કરતાં ઘણો મોટો હોવો જોઈએ.

માટે કોઈપણ ત્રિકોણમાં જો એક બાજુ ઈં પ્ર.સિ. પ્રમેય.

(૧) નહાની બાજુ અવ વધારીને અક જેટલી બનાવીને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) આ સિદ્ધાંતની મદદથી છઠ્ઠો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એક ચતુષ્કોણકૃતિમાં ચારેમાં મોટી અને ચારેમાં ન્હાની બાજુઓ એકબીજાની સામે હોય, તો એવું બતાવો કે તે ન્હાની બાજુ ઉપરનો પ્રત્યેક ખૂણો તેના સામેના ખૂણા કરતાં મોટો છે.

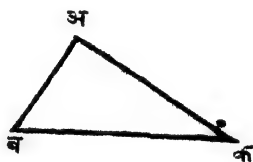
સિદ્ધાંત ૧૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો બીજા કરતાં મોટો હોય તો મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ ન્હાના ખૂણાની સામેની બાજુ કરતાં મોટી થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક ત્રિકોણમાં
અબક ખૂણો અકબ ખૂણા કર-
તાં મોટો છે.

તો અક બાજુ અબ બાજુ
કરતાં મોટી થશે.



સિદ્ધતા.

કેમકે જો અક બાજુ અબ કરતાં મોટી ન હોય,
તો અક બાજુ અબની યરોબર હોય અથવા અબ કરતાં
ન્હાની હોય.

પણ અક બાજુ અબની યરોબર તો હોઈ ન શકે;
કારણ કે તેમ હોય તો અબક અને અકબ ખૂણા યરો-
બર થાય. (૧.૫)

પણ તે ખૂણાઓ કાંઈ યરોબર નથી; (પ્રતિ.)
વળી અક બાજુ અબ કરતાં ન્હાની પણ હોઈ ન શકે;
કારણ કે તેમ હોય તો અબક ખૂણો અકબ કરતાં
ન્હાનો થાય. (૧.૧૬)

પણુ તેમ તો નથી. (પ્રતિ.)

માટે અક લીટી અવની બરોબર પણુ નથી અને તેથી નહાની પણુ નથી;

એટલે અક બાળુ અવ કરતાં મોટી છે.

માટે જો કોઈ ત્રિકોણમાં એક ખૂણો ૯૦ પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—૧૮ મા તથા ૧૯ મા સિદ્ધાંતમાં પેહેલો કયો અને બીજો કયો એ સ્મરણમાં રાખવું મુશ્કિલ લાગેછે. માટે યાદ રાખવું કે ૧૮ મા ૫ મા પ્રમાણે છે અને ૧૯ મા ૧૬ મા પ્રમાણે છે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક કાટખૂણ ત્રિકોણમાં કઈ બાળુ સર્વથી મોટી ?

(૨) એક અવક સમદ્વિબાળુ ત્રિકોણનો અક પાંચાડ બિંદુ સ્પર્શી લંબાવીને અડ લીટી દોરી; તો તે લીટી ત્રિકોણની સરખી બાળુઓ કરતાં મોટી થશે.

(૩) કોઈપણ ત્રિકોણની બે બાળુઓ અસમાન હોય તો તે બાળુઓ વચ્ચેના શિરોબિંદુથી સામી બાળુના કોઈપણ બિંદુ સ્પર્શી દોરેલી લીટી તે બેમાંની મોટી બાળુ કરતાં નહાની હોવી જોઈએ.

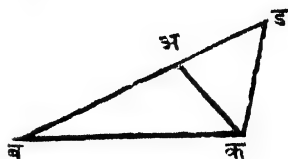
(૪) એક આપેલી લીટી ઉપર એક બહારના બિંદુથી જે લીટીઓ દોરયે તેમાં જે લીટી આપેલી લીટી ઉપર લંબ હોય તે સૌથી નહાની; અને તે લંબની એકજ તરફની બીજી લીટીઓ લઈએ તો જે લીટી લંબની વધારે પાસે તે લીટી વધારે દૂરની લીટી કરતાં નહાની; અને આપેલા બિંદુમાંથી બધેજ લીટી લંબની દરેક બાળુએ સરખી દોરી શકાય.

સિદ્ધાંત ૨૦. પ્રમેય.

પ્રતિષ્ઠા:—એક ત્રિકોણની કોઈપણ બે બાળુઓ મળીને ત્રીજી કરતાં મોટી છે.

સાધન.

ધારો કે અવક આપેલો ત્રિકોણ છે; તો તેની કોઈપણ બે બાજુ મળીને ત્રિજી કરતાં મોટી થશે;
 એટલે વજ, અક મળીને કવ કરતાં મોટી,
 અક, કવ મળીને અબ કરતાં મોટી,
 અને કવ, વજ મળીને અક કરતાં મોટી.



રચના.

વજ લીટી લંબાવીને, બહારનો અડ ભાગ અક પરોબર કરો; (૧.૩).
 અને ડક સાંધો.

સિદ્ધતા.

અડક ત્રિકોણમાં અડ બાજુ અક ની પરોબર છે, (૨૨.)
 માટે અકડ ખૂણો અડક ખૂણાની પરોબર છે. (૧.૫)
 પણ વકડ ખૂણો અકડ ખૂણો કરતાં મોટો છે. (૫.૫.૯)
 માટે વકડ ખૂણો અડક એટલે વડક ખૂણો કરતાં પણ મોટો છે.

વળી વકડ ત્રિકોણમાં,
 વકડ ખૂણો વડક ખૂણો કરતાં મોટો હોય,
 તો વડ બાજુ વક કરતાં મોટી થવી જોઈએ. (૧.૧૯)
 માટે, વડ લીટી એટલે વજ અને અડ મળીને વક કરતાં મોટી;

પણ અડ લીટી તો અકની પરોબર છે. (૨૨.)

માટે વજ અને અક મળીને વક કરતાં મોટી છે.

એજ પ્રમાણે અક, કવ મળીને અવ કરતાં મોટી,

અને કવ, વચ મળીને અક કરતાં મહોટી છે એમ સિદ્ધ કરી શકાય.

મોટે એક ત્રિકોણની કોઈ પણ બે બાજુઓ ધ૦ પ્રાપ્તિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંત અ ખૂણા દુભાગવાથી સિદ્ધ કરો.

(૨) તેમજ અ ખૂણામાંથી પાયા ઉપર લંબ દોરવાથી સિદ્ધ કરો.

(૩) કોઈપણ બે બાજુની બાદબાકી ત્રિજી બાજુ કરતાં ન્હાની છે.

(૪) બે બિંદુઓ વચ્ચે ટુંકામાં ટુંકો અંતર એક સીધી લીટી છે.

(૫) જો એક ચતુષ્કોણાકૃતિની સામસામેની બાજુઓ લંબાવતાં મળી જાય તો આખા ત્રિકોણની પરિમિતિ તે ચતુષ્કોણની પરિમિતિ કરતાં વધારે હોવી જોઈએ.

(૬) એક ત્રિકોણમાં કોઈપણ બિંદુ લઈને તેને ત્રણ ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને ત્રિકોણની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

(૭) એક ચતુષ્કોણાકૃતિની પરિમિતિ તેની બે કર્ણોના સર્વાંગા કરતાં વધારે છે.

(૮) બહુકોણાકૃતિમાં એક બિંદુ લઈને બધા ખૂણાઓ સાથે સાંધ્યું હોય તો સાંધનારી લીટીઓ મળીને તે આકૃતિની પરિમિતિના અડધ કરતાં વધારે થશે.

(૯) ત્રિકોણની એક બાજુને દુભાગનારા બિંદુથી સામા ખૂણા સ્પર્શી દોરેલી લીટીની બમણાઈ કરતાં તે ત્રિકોણના બે બાજુનો સર્વાંગા વધારે છે.

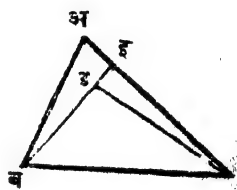
સિદ્ધાંત ૨૧. પ્રમેય.

પ્રતિપાઃ—જો એક ત્રિકોણની એક બાજુના છેડાઓ-

માંથી તે ત્રિકોણની અંદરના એક બિંદુ સૂધી બે લીટીઓ દોરિયે, તો તે લીટીઓ ત્રિકોણની બીજી બે બાજુઓ કરતાં વ્યોછી થશે. પણ તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો તે બાજુઓની વચ્ચેના ખૂણા કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

અવક એક ત્રિકોણ છે; તેની બક બાજુના બંધને ક છેડાઓમાંથી તે ત્રિકોણની અંદરના ક બિંદુ સૂધી વડ, અને કડ લીટીઓ દોરો;



તો (૧) વડ અને કડ મળીને વઅ અને અક કરતાં વ્યોછી થશે;

(૨) વડક ખૂણો વઅક ખૂણા કરતાં મોટો થશે.
રચના.

વડ ને લંબાવીને અક લીટીને ક બિંદુમાં છેદવા દો.
સિદ્ધતા.

(૧) વઅ ત્રિકોણમાં વઅ અને અક મળીને વક કરતાં મોટો છે. (૧. ૨૦.)

એ પ્રત્યેકમાં ક ઉમેરો;

ત્યારે વઅ, અને અક લીટી વક અને કક કરતાં મોટો થઈ. (પ્ર. પ્ર. ૪)

વળી કક ત્રિકોણમાં ક અને ક બાજુઓ કક કરતાં મોટો છે. (૧. ૨૦)

એ પ્રત્યેકમાં વડ ઉમેરો;

ત્યારે વક અને ક લીટીઓ વક અને કક કરતાં મોટો છે. (પ્ર. પ્ર. ૪)

પણ ઉપર બતાવ્યું કે વચ વ્યને અક લીટીઓ વહ વ્યને ફક કરતાં મ્હોટી છે.

મોટું વચ વ્યને અક બાળૂઓ વડ વ્યને ઉક કરતાં તો વધારે મ્હોટી થઈ.

(૨) વળી, હક ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો વડક માંહેલા સામેના હક કરતાં મ્હોટો છે. (૧. ૧૬)

વ્યને વચ ત્રિકોણનો બહારનો ખૂણો હક માંહેલા સામેના ખૂણો વચ વ્યને વચ કરતાં મ્હોટો છે. (૧. ૧૬)

મોટું વચ ખૂણો વચ કરતાં વધારે મ્હોટો થયો.

મોટું જો એક ત્રિકોણની એક બાળૂના ધૃ પ્ર. સિ.

પ્રત્ય.

(૧) આ સિદ્ધાંતનો ખીજો ભાગ અક લીટી સાંધીને પાયા બધી વધારીને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ત્રિકોણમાં એક બિંદુ લઈને તેને પ્રત્યેક ખૂણા-સાથે જોડવાથી જે ત્રણ લીટીઓ થશે તેઓ બધી મળીને ત્રિકોણની ત્રણ બાળૂ કરતાં ઝાઝી થશે.

(૩) આપેલું બિંદુ ત્રિકોણની એક બાળૂમાં જ લઈને આ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

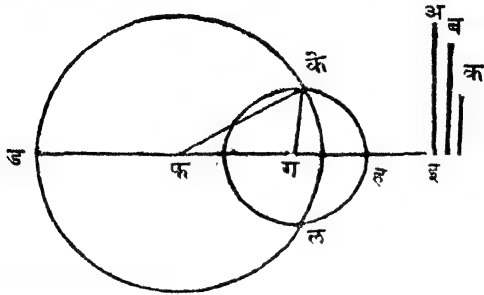
સિદ્ધાંત ૨૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક એવો ત્રિકોણ કરવો કે તેની બાળૂઓ અનુક્રમે આપેલી ત્રણ લીટીઓની બરોબર થાય; જે આપેલી લીટીઓ માંહેલી કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મ્હોટી છે.

સાધન.

ધારો કે અ, બ, ક, આપેલી ત્રણ લીટીઓ છે;

જે માંની કોઈપણ બે મળીને ત્રીજી કરતાં મોટી છે;
એટલે અ વ્યને વ મળીને ક કરતાં મોટી.



અ વ્યને ક મળીને વ કરતાં મોટી,
વ્યને વ ને ક મળીને અ કરતાં મોટી;
તો એક એવો ત્રિકોણ બનાવવાનો છે કે જેની ત્રણે
બાજુઓ વ્યતુક્રમે અ, વ, વ્યને ક ની પરોપર હોય.

રચના.

એક ડહ સીધી લીટી દોરો; એવી કે ડ બિંદુ વ્યાગળ
સમર્યાદ એટલે હદ થયલી હોય વ્યને ક બિંદુ તરફ લંબા-
વી શકાય.

પછી ડફ ભાગ અ લીટી પરોપર,

ફગ ભાગ વ લીટી પરોપર,

વ્યને ગહ ભાગ ક લીટી પરોપર કાપો. (૧. ૩)

ફ બિંદુને મધ્યબિંદુ લઈને વ્યને ફડ જેટલી ત્રિજ્યા
લઈને એક વર્તુલ ડલકે દોરો. (સ્વી. ૩)

ગ મધ્યબિંદુ વ્યને ગહ ત્રિજ્યા લઈને એક વર્તુલ
લહકે દોરો. (સ્વી. ૩)

એ બે વર્તુલો કે વ્યને લ બિંદુઓમાં છેદે છે.

ફકે, અને ગકે સાંધો.

(સ્ત્રી. ૧)

તો કેફગ માગેલો ત્રિકોણ થશે.

સિદ્ધતા.

હલકે વર્તુલનું ફ મધ્યબિંદુ છે,

માટે ફકે લીટી ફડ ની અરોબર છે; (વ્યાખ્યા ૧૫)

પણ ફડ લીટી તો અ લીટીની અરોબર છે;

માટે ફકે લીટી પણ અ લીટીની અરોબર છે. (પ્ર.પ્ર. ૧)

વળી, હલકે વર્તુલનું ગ મધ્યબિંદુ છે,

માટે ગકે લીટી ગહ ની અરોબર છે. (વ્યા. ૧૫)

પણ ગહ લીટી ક લીટીની અરોબર છે;

માટે ગકે લીટી પણ ક લીટીની અરોબર છે. (પ્ર.પ્ર. ૧)

અને ફગ લીટી બ લીટીની અરોબર છે; (રચના)

માટે કેફગ એવો ત્રિકોણ થયો કે તેની ત્રણ બાજુઓ કેફ, ફગ અને ગકે અનુક્રમે આપેલી લીટીઓ અ, બ, કની અરોબર છે. ક. ક.

ટીપ્પણી:—સહજ વિચાર કરતાં અને અરોબર આકૃતિ કહાડતાં જણાશે કે જે શરત પ્રતિજ્ઞામાં આપી છે તે આપી નહોત તો જે એ વર્તુલો દોરાયા તે અવશ્ય એકેકને છેદત નહિ; કદાચ એક વર્તુલ ખીખની અંદર પડત, અથવા બિલકુલ બહાર પડત. પણ આપેલી શરત પ્રમાણે તો છેદવા જોઈએ જ, અને ન છેદે એ અસંભવિત છે, તે ઉપર કહેલી એ આકૃતિઓ જૂદી જૂદી દોરવાથી સહજ સાબિત થઈ શકશે.

પ્રશ્ન.

(૧) આપેલા પાયા ઉપર એક એવો ત્રિકોણ દોરો કે તેની બે બાજુઓ આપેલી બે લીટીઓની અરોબર હોય.

- (૨) પ્રતિજ્ઞામાં જે શરતો આપી છે તેનું કારણ શું ?
 (૩) બંને વર્તુલો પરસ્પર છેદવા જોઈએ જ એવું સિદ્ધ કરો.
 (૪) સિદ્ધાંતમાં જે અનુક્રમે બાજુઓ આપેલી લીટીની બરોબર છે, તેથી જોઈએ અનુક્રમે બરોબર થાય એવો ત્રિકોણ દોરો.

(૫) આપેલી ત્રણ લીટીઓ માંહેલી ક લીટી, અ અને બના સર્વાંગી બરોબર હોય તો આકૃતિ કેવી થશે ? તેમ હોય તો ત્રિકોણ થાય કે નહિ.

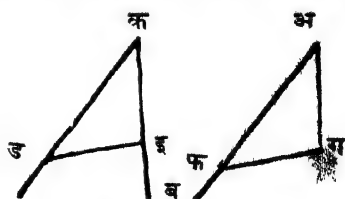
(૬) આ સિદ્ધાંત અને પહેલા સિદ્ધાંત વચ્ચે કેટલો સંબંધ છે.

સિદ્ધાંત ૨૩. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટીમાંના એક આપેલા બિંદુ પાસેથી એક એવો ખૂણો કરવો કે તે એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે અબ આપેલી સીધી લીટી છે, અને અ તેમાં આપેલું બિંદુ છે; અને ડકફ આપેલો ખૂણો છે. તો અ બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરવી છે કે તે લીટી આપેલી અબ લીટીની સાથે ડકફ ખૂણા જેટલો એક ખૂણો કરે.



રચના.

કડ, કફ લીટીઓમાં કોઈ પંચુ ડ અને ફ એવાં બે

ખિંદુઓ લો; અને હવે લીટી દોરો.

અબ લીટીમાંથી અફ ભાગ કડ જેટલો કાપો. (૧. ૩)

અને અફ લીટી ઉપર એક અફગ ત્રિકોણુ એવો દોરો કે તેની અગ, ગફ બાજુઓ અનુક્રમે કહ, હવે ની બરોબર થાય. (૧. ૨૨)

ત્યારે અફગ ખૂણો હવે ખૂણાની બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

અફગ, હવે ત્રિકોણુમાં,

{ અફ બાજુ હવેની બરોબર છે, (૨૨.)
અગ બાજુ હવેની બરોબર છે, (૨૨.)
અને અફ પાંચો હવેની બરોબર છે, (૨૨.)

માટે, અફગ ત્રિકોણુ હવેની બરોબર છે. (૧. ૮)

માટે, અફગ ખૂણો પણ હવે ખૂણાની બરોબર છે;

એટલે અબ લીટીના અ ખિંદુમાંથી અગ લીટી એવી દોરી કે તે આપેલી અબ લીટીની સાથે આપેલા ખૂણા જેટલો ખૂણો કરે છે. ક. ક.

પ્રત્યક્ષ.

(૧) એવું બતાવો કે ૧૧ મા સિદ્ધાંત આ સિદ્ધાંતનો એક પ્રકાર છે.

(૨) ૨૨માં ૨૨ મા સિદ્ધાંતની મદદથી જે ત્રિકોણુ દોર્યો છે તેની આખી આકૃતિ આપો.

(૩) જે આપેલા ખૂણાના સર્વાંગો જેટલો એક ખૂણો કરો.

(૪) જે આપેલા ખૂણાની બાદબાકી જેટલો એક ખૂણો કરો.

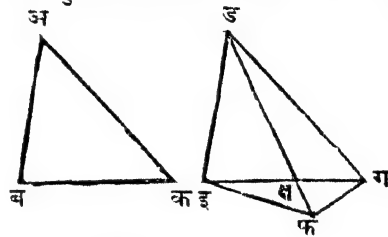
સિદ્ધાંત ૨૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો જે ત્રિકોણુમાં એકની જે બાજુઓ

અતુકમે ખીજની ખે બાજુઓની બરોબર હોય, પણ તે સરખી બાજુઓની વચ્ચેનો એકનો ખૂણો ખીજના ખૂણા કરતાં મોટો હોય, તો જે ત્રિકોણમાં મોટો ખૂણો છે તે ત્રિકોણનો પાયો (એટલે તે મોટા ખૂણાની સામેની બાજુ) ખીજ ત્રિકોણના પાયો કરતાં મોટો થશે.

સાધન.

અવક, હક બે ત્રિકોણો છે, જેમાંની બન્ન, અક બાજુઓ અતુકમે હક, હક બાજુઓની બરોબર છે; પણ બન્ન ખૂણો હક ખૂણા કરતાં મોટો છે; ત્યારે બક પાયો હક કરતાં મોટો થશે.



હક વ્યને હક લીટીઓમાં, હક લીટી હક કરતાં મોટી નથી એમ ધારો. (એ વિરોધીપણ્યો).

રચના.

હક લીટીમાં હ બિંદુ વ્યાગળ હક જે દિશાએ પડે છે તે તરફ હક ખૂણો બન્ન ખૂણા બરોબર કરો. (૧.૨૩)
હક ભાગ હક અથવા અક બરોબર કરો. (૧.૩)
હક, ગૂક સાંધો.

સિદ્ધતા.

બન્ન વ્યને હક ત્રિકોણોમાં,
 { બન્ન લીટી હક ની બરોબર છે, (પ્રતિ.)
 { વ્યને અક લીટીહક ની બરોબર છે. (૨૨.)
 { વ્યને અંતર્ખૂણો બન્ન અંતર્ખૂણો હક ની બરોબર છે. (૨૨.)

માટે, બધક ત્રિકોણુ સર્વ પ્રકારે હડગ ત્રિકોણુની
અરોઅર છે. (૧.૪).

અને, તેથી વક્ર પાયો હગ પાયાની અરોઅર છે.

વળી ફડગ ત્રિકોણુમાં,

હગ લીટી હફ ની અરોઅર છે,

માટે હફગ ખૂણો હગફ ખૂણાની અરોઅર છે. (૧.૫).

પણ હગફ ખૂણો તો હગફ ખૂણા કરતાં મોટો છે,

માટે હફગ ખૂણો પણ હગફ ખૂણા કરતાં મોટો છે;

ત્યારે હફગ ખૂણો તો હગફ ખૂણા કરતાં ઘણો મોટો
થયો.

માટે હગ બાજુ હફ બાજુ કરતાં મોટો થઈ. (૧.૧૬)

પણ હગ તો વક્ર ની અરોઅર સામિત કીધી છે;

માટે વક્ર પાયો હફ પાયા કરતાં મોટો છે.

માટે જો બે ત્રિકોણુમાં એકની બે બાજુઓ ઇંચ પ્રાપ્તિ.

ટીપ્પણી:—(૧) ઉપલી સિદ્ધતામાં એવી શરત કીધી છે કે હડ
લીટી હફ કરતાં મોટી નથી; એ શરત અગત્યની છે, અને
જો એ શરત પહેલાંથી કીધી ન હોય તો રચનામાં ત્રણ જૂદી
જૂદી આકૃતિઓ થઈ શકે; કારણ કે ફ બિંદુ હગ લીટી ઉપ-
ર ન પડે, અથવા તે લીટીની ઉપરની બાજુએ પડે, અથવા
તેની નીચેની બાજુએ પડે. આ આકૃતિમાં ફ બિંદુ હગ
લીટીની નીચે ન પડે તેનું કારણ ઉપલી શરત છે. ત્યારે હવે
એ સિદ્ધ કરવાનું રહ્યું કે જો હડ લીટી હફ કરતાં મોટી ન
હોય તો ફ બિંદુ હગ લીટીની નીચે ન પડે.

કારણ કે ધારો કે હગ, હફ લીટીઓ ફ બિંદુમાં છેદે છે;

હવે હડ લીટી હફ કરતાં મોટી નથી,

માટે હડ લીટી હગ કરતાં પણ મોટી નથી;

માટે હગફ ખૂણો હડગ ખૂણા કરતાં પણ મોટો નથી. (૧.૧૮)

પણ, બહારનો ખૂણો ડક્કા માંહેલા ખૂણા ડક્કા કરતાં મોટો છે; (૧.૧૬).

માટે ડક્કા ખૂણો ડક્કા ખૂણા કરતાં મોટો છે.

માટે ડગ લીટી ડક્કા કરતાં મોટી છે;

માટે ડફ લીટી પણ ડક્કા કરતાં મોટી છે.

એટલે કે બિંદુ ડગ લીટીની નીચે પડવું જોઈએ.

ટીપ્પણી—(૨) જો ડફ લીટી ડફ કરતાં મોટી હોય તો એમ નહિ ધારવું કે આ સિદ્ધાંત યદ્યપિ શકે નહિ; કારણ કે જો તેમ હોય તો માત્ર આદિતિરચનામાં ફેર થશે. તે એ કે ડ બિંદુ આગળ બબકા ખૂણાની બરોબર જે ખૂણા કરીશું તે જે દિશાએ ડફ લીટી પડે છે તે દિશાએ ન કરતાં જે દિશાએ ડફ પડે છે તે દિશાએ ડફ લીટી ઉપર કરીશું.

પ્રશ્નો.

(૧) જો કે બિંદુ ડગ લીટીની નીચે પડે તો બતાવો કે ડફ લીટી ડફ લીટી કરતાં મોટી હોય નહિ.

(૨) “ડફ લીટી ડફ કરતાં મોટી નથી” એ શબ્દોનો અર્થ શો?

(૩) જો ઉપલી શરત ન લખી હોય તો જે ત્રણ પ્રકારે થાય તે જુદા જુદા સિદ્ધ કરો.

(૪) સ્થાનોપરીની રીતે ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

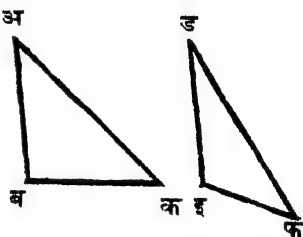
સિદ્ધાંત ૨૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા—જો એ ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ અતુલ્ય બીજાની બે બાજુઓની બરોબર હોય, પણ એકનો પાયો બીજાના પાયો કરતાં મોટો હોય, તો મોટો પાયાવાળા ત્રિકોણની સરખી બાજુઓ વચ્ચેનો

અનુતર્જુલો બીજા ત્રિકોણ ના અનુતર્જુલુ કરતાં મહોટો થશે.

સાધન.

અવક અને હડફ એ એવા ત્રિકોણો છે કે એકની અવ અને અવ બાજુઓ અનુ-ક્રમે બીજાની હડફ અને હડફ બાજુઓની અરોઅર છે; પણ વક પાયો હફ પાયા કરતાં મહોટો છે;



તો વઅવ ખૂણો હડફ ખૂણા કરતાં મહોટો થશે.

સિદ્ધતા.

કેમકે, જો વઅવ ખૂણો હડફ ખૂણા કરતાં મહોટો ન હોય તો તે હડફ ની અરોઅર હોવો જોઈએ અથવા તેથી નહાનો હોવો જોઈએ.

પણ વઅવ ખૂણો હડફ ની અરોઅર તો નથી;

કારણ કે, તેમ હોય તો વક પાયો હફની અરોઅર થાય. (૧. ૪)

પણ તેમ નથી; (પ્રતિ.)

વળી, વઅવ ખૂણો હડફ ખૂણા કરતાં નહાનો પણ નથી;

કેમકે તેમ હોય તો વક પાયો હફ કરતાં નહાનો થાય. (૧. ૨૪)

પણ તેમ નથી. (પ્રતિ.)

મટે વઅવ ખૂણો હડફ ની અરોઅર નથી, અને તેથી નહાનો પણ નથી;

એટલે, અબક ખૂણો ફડક ખૂણા કરતાં મોટો છે.

માટે જો એ ત્રિકોણોમાં એકની એ બાજુઓ ૬૦ પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ૨૪ માનો વ્યત્યાસ છે; અને એની સિદ્ધતા પણ ઉલટીજ છે; જેવા સંબંધ સિ. ૫ અને ૬ ને છે, તેવા સિ. ૨૪ અને ૨૫ ને છે. ૬૬૩ સિદ્ધાંતની સમજણ જુઓ.

ટીપ:—જે પ્રમાણે અરાઢમા અને આગણીસમા સિદ્ધાંતો પાંચમા અને છઠ્ઠાને મળતા છે. તેજ પ્રમાણે ચોવીસમા તથા પચીસમા, ચોથા અને આઠમાને મળતા છે. એકજ પ્રતિજ્ઞામાં ચોથા અને ચોવીસમા સિદ્ધાંતો નીચે પ્રમાણે લખાય.

જો એ ત્રિકોણોમાં એકની એ બાજુઓ બીજાની એ બાજુઓની અનુક્રમે બરાબર હોય, તો જે પ્રમાણે એક ત્રિકોણની બાકીની બાજુની સામેના ખૂણા, બીજા ત્રિકોણની બાકીની બાજુની સામેના ખૂણા કરતાં મોટો, નહાનો અથવા તેની બરાબર હોય, તે પ્રમાણે એકની બાકીની બાજુ, બીજાની બાકીની બાજુ કરતાં મોટી, નહાની અથવા તેની બરાબર થશે.

પ્રશ્ન.

અબક ત્રિકોણનું અ શિરોબિંદુ, બક પાયાના ક્ષ મધ્યબિંદુ સાથે સાંધ્યું; તો અબ લીટી અક કરતાં મોટી અથવા નહાની હોય તે પ્રમાણે અક્ષબ ખૂણા પહેળો અથવા સાંકડો ખૂણા થશે.

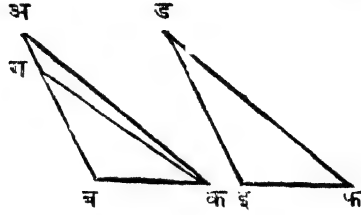
સિદ્ધાંત ૨૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણના એ ખૂણાઓ અનુક્રમે બીજા ત્રિકોણના એ ખૂણાઓની બરાબર હોય, અને (૧) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે રહેલી બાજુ બન્ને ત્રિકોણમાં સરખી હોય, અથવા (૨) ગમે તે સરખા ખૂણાઓની સામેની એકેક બાજુ સરખી હોય, તો બાકીની બાજુઓ અનુક્રમે એક બીજાની બરાબર

અર થશે, અને આકી રહેલા ખૂણાઓ પણ અરોઅર થશે.

સાધન.

પહેલો ભાગ:—
ધારો કે સરખા ખૂ-
ણાઓની વચ્ચે આ-
પેલી બાજુ અને ત્રિ-
કોણમાં સરખી છે.



ધારો કે અબક, ડફએ એવા ત્રિકોણો છે, કે અબક ખૂણો ડફની અરોઅર છે, અને અકબ ખૂણો ડફઈની અરોઅર છે; અને બક બાજુ ફકની અરોઅર છે.

તો અબક અને ડફ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે એકેકની અરોઅર થશે;

એટલે, અબ બાજુ ડફની અરોઅર થશે, અને અક બાજુ ફકની અરોઅર થશે; અને અબક ખૂણો ડફ ખૂણાની અરોઅર થશે.

કેમકે જો અબ બાજુ ડફની અરોઅર ન હોય, તો તે-
માંની એક બીજી કરતાં મોટી હોવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અબ બાજુ ડફ કરતાં
મોટી છે.

રચના.

અબ લીટીમાંથી અગ ભાગ ડફ અરોઅર કાપો. (૧. ૩)

અને અક લીટી દોરો. (૨વી. ૧)

સિદ્ધતા.

અબક, ડફ ત્રિકોણોમાં,

{ ગવ બાળુ હદની યરોયર છે, (૨૨.)
 યને વક, હફની યરોયર છે, (પ્રતિ.)
 યને યન્તખૂણો ગવક, હફ યન્તખૂણાની ય-
 રોયર છે,

માટે યે બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે યરોયર છે, (૧. ૪)

માટે ગવક ખૂણો હફ ખૂણાની યરોયર છે.

પણ અવક ખૂણો હફ ખૂણાની યરોયર છે, (પ્રતિ.)

માટે ગવક ખૂણો અવક ખૂણાની પણ યરોયર છે;
 (પ્ર. પ્ર. ૧)

એક ભાગ તેના આખાની યરોયર;

એ યસંભવિત છે. (પ્ર પ્ર ૯)

માટે અવ બાળુ હદ કરતાં મોટી નથી.

એજ પ્રમાણે સિદ્ધ થઈ શકે કે હદ બાળુ અવ કરતાં
 મોટી નથી;

એટલે અવ બાળુ હદની યરોયર છે.

માટે અવક યને હફ ત્રિકોણોમાં,

{ અવ બાળુ હદ ની યરોયર છે, (સાબિત કીધું)
 યને વક બાળુ હફ ની યરોયર છે, (પ્રતિ.)
 યને યન્તખૂણો અવક, હફ યરોયર છે.

માટે યે બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)

એટલે અવ બાળુ હફ ની યરોયર છે,

અને અવક ખૂણો હફ ખૂણાની યરોયર છે.

ખીજો ભાગ:—ધારો કે ત્રિકોણોમાં કોઈપણ બે સરખા
 ખૂણાની સામેની એકેક બાળુ સરખી આપી છે.

ધારો કે અવક ખૂણો હફ ખૂણાની યરોયર છે, યને
 અવક, હફ ની યરોયર છે, યને અવ બાળુ હદ બાળુની
 યરોયર છે,

તો અવક વ્યને ડહફ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.
એટલે વક વાળુ ડફ ની યરોયર, વ્યને અક, ડફ ની
યરોયર થશે.

વ્યને વઅક ખૂણો ડહફ ખૂણાની યરોયર થશે.

જો વક વાળુ ડફ યરોયર ન હોય, તો વ્યમાંની વ્યક
ખીછ કરતાં મહોટી હોવી જોઈએ.

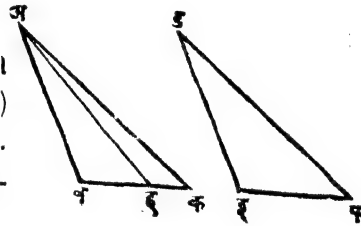
જો વ્યમ બની શકે તો, ધારો કે વક વાળુ ડફ કરતાં
મહોટી છે.

૨. ચના.

વક માંથી વહ ભાગ
ડફ જોટલો કાપો. (૧. ૩)

વ્યને અહ લીટી દોરો.

તો, અવહ, ડહફ, ત્રિ-
કોણોમાં,



- { અવ વાળુ ડહ ની યરોયર છે,
- { વ્યને વહ, ડફ ની યરોયર છે,
- { વ્યને વ્યન્ત ખૂણા અવહ, ડહફ સરખા છે ;

માટે વ્ય એ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)

માટે અવહ ખૂણો ડફદ ખૂણાની યરોયર છે.

પણ ડફદ ખૂણો તો અવહ ખૂણાની યરોયર છે.
(પ્રતિ.)

માટે અવહ ખૂણો અવહ ખૂણાની યરોયર છે. (પ્ર. ૧)

એટલે અવહ ત્રિકોણનો વ્યક બહારનો ખૂણો તે
ત્રિકોણના વ્યંદરના સામેના ખૂણાની યરોયર છે,
વ્યે વ્યશક્ય છે. (૧. ૧૬)

માટે વક વાળુ ડફ કરતાં મહોટી નથી ;

તેમજ ફક, વક કરતાં મહોટી નથી એમ સાબિત થઈ શકે;

માટે એ બે બાજુઓ સરખી છે.

ત્યારે અવક, હફ ત્રિકોણોમાં,

{ અવ બાજુ હફની બરોબર છે,
અને વક, ફફની બરોબર છે,
અને અવક, હફ અન્તર્બાજુ સરખા છે;
માટે એ બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે. (૧. ૪)
માટે અવ બાજુ હફની બરોબર છે,
અને વક બાજુ ફફની બરોબર છે.

માટે જો એક ત્રિકોણના બે બાજુઓ ઇ. ગ. સિ.

ટીપ (૧):— બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર, એટલે ત્રણ બાજુઓ પણ અનુક્રમે સરખી અને ત્રણ ખૂણાઓ પણ અનુક્રમે સરખા ક્યારે હોય તે જોવું જોઈએ:—

(૧) સિદ્ધાંત ૪ પ્રમાણે; એટલે બંને ત્રિકોણોની બે બાજુઓ અને અન્તર્બાજુ સરખા હોય તો,

(૨) સિદ્ધાંત ૮ પ્રમાણે; એટલે બંને ત્રિકોણોની ત્રણ બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય તો,

(૩) સિદ્ધાંત ૨૬ પ્રમાણે; એટલે બંને ખૂણા સરખા હોય, અને

(૪) તે સરખા ખૂણાઓની વચ્ચે આવેલી બાજુઓ સરખી હોય,

અથવા (ખ) બે સરખા ખૂણાની સામેની બે બાજુઓ સરખી હોય તો.

એટલે, ઘણું કરીને છ પરિમિતો (ત્રણ બાજુ અને ત્રણ ખૂણા) માંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય તો બીજાં ત્રણ સરખાં થશે.

પણ નીચે લખેલા બે પ્રકારો એવા છે કે તેમાં ત્રણ પરિ-
મિતો સરખાં આપેલાં છતાં ખીજાં ત્રણ અવશ્ય સરખાંજ
હોવાં જોઈએ એમ નથી.

(૧) જો એક ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ અનુક્રમે ખીજાના
ત્રણ ખૂણાઓની બરાબર હોય,

(૨) જો એક ત્રિકોણની બે બાજુઓ અનુક્રમે ખીજાની
બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને અનતર્પૂણા નહિ, પણ
કોઈ ખીજા બે ખૂણા બરાબર હોય.

આ છ પરિમિતોમાંથી ત્રણ સરખાં આપ્યાં હોય, ને તે
ઉપરથી બાકીનાં ત્રણ સરખાં સિદ્ધ કરવાં હોય તો ઉપર
ખતાવ્યા પ્રમાણે છ પ્રકાર થાય; તેમાંના ચાર ખરા છે. (સિ-
દ્ધાંત ૪-૮-૨૬ના બે ભાગ); અને બે અવશ્ય ખરા નથી;
એટલે તે બે પ્રકારોમાં બાકીનાં ત્રણ પરિમિતો સરખાં થાય
કિંવા નહીં થાય; અને તે બે પ્રકારો ઉપર લખ્યા તે છે.

સર્વ પ્રકારે સરખા ત્રિકોણો હોય ત્યારે તે ત્રિકોણો સ્થાનો-
પરી થઈ શકે; માટે તેઓનું ક્ષેત્રફળ પણ સરખુંજ થાય.

ટીપ્પણ (૨):—ઉપર જે બે પ્રકારો બાદ કીધા છે તેમાંના
ખીજાને માટે એક નવી શર્ત વધારિયે તો ત્રિકોણો સરખા
થશે.

તે શર્ત શી છે તે નીચેના સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાથી જણાશે.

જો બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે
ખીજાની બે બાજુઓની બરાબર હોય, અને બરાબર
બાજુઓની એક જોડની સામેના ખૂણાઓ બરાબર
હોય, તો બીજી બરાબર બાજુની સામેના ખૂણાઓ
બરાબર અથવા ન્યૂનતાપૂરક થશે.

ધારે છે અબ=ડહ

અને અક=ડફ,

અને <અબક = <

ડહફ;

તો <ક અને <ફ

ન્યૂનતાપૂરક થશે.

હવે જો <અ = <ડ હોય, તો તો <ક = <ફ થશે.

અને ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા થશે.

પણ જો <અ, <ડ ની બરોબર ન હોય તો ધારે છે ડ મોટો છે;

તેમાંથી ડહગ ભાગ <અ બરોબર કરે. (૧.૨૩.)

તો <અ = <હગ (૨અ.) અને <બ = ડ (પ્રતિ.)

અને અબ = ડહ (પ્રતિ.)

માટે (૧.૨૬) અબક ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે ડહગ ત્રિકોણની બરોબર છે.

∴ <ક = <હગહ, અને અક = હગ;

પણ અક = ડફ (પ્રતિ.) ∴ હગ = ડફ ∴ <હગફ = <ફ.

પણ ગ આગળના બે ખૂણા એકેકના ન્યૂનતાપૂરક છે.

(૧.૧૩)

અને તેમાંનો એક = <ક, અને બીજો = <ફ

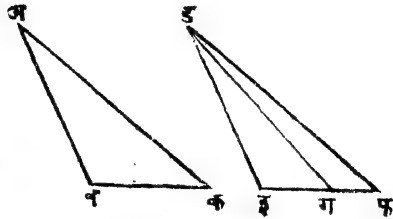
∴ <ક અને <ફ ન્યૂનતાપૂરક છે.

પ્ર. સિ.

ટીપ (૩):—માટે જો બંને બાજુઓ અનુક્રમે સરખી હોય અને એક જોડની સામેના ખૂણા સરખા હોય તો,

(૧) બાકીની સરખી બાજુની સામેના ખૂણાઓમાંના એક કાઢખૂણ હોય, અથવા

(૨) તે બાજુઓની સામેના ખૂણા બંને સાંકડા હોય, અથવા



(૩) તે બાબુઝ્મીની સામેના ખૂણા બન્ને પહોળા હોય તો બન્ને ત્રિકોણો સરખાજ થશે. કારણ, જો એક કાટખૂણુ હોય તો તેના સરખો તેમજ તેના ન્યૂનતાપૂરક પણ કાટખૂણુ; માટે તે રહેલા ખૂણા સરખાજ થયા; માટે ત્રિકોણો પણ સરખાજ.

જો બન્ને પહોળા અથવા સાંકડા હોય તો તે એકેકના ન્યૂનતાપૂરક તો થઈ શકે નહિ; માટે તે સરખાજ હોવા જોઈએ; એટલે ત્રિકોણો પણ સરખાજ થયા.

પ્રશ્ન.

(૧) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા ક્યારે ક્યારે હોય ?

(૨) જો બે ત્રિકોણોમાં બંને બાબુઝ્મા બરોબર હોય, અને એક જોડની સામેના ખૂણા બરાબર હોય, તો ત્રિકોણો બરોબર ક્યારે થાય, અને ક્યારે ન થાય ?

(૩) બે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર હોય તો તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર હોય કે નહિ ? જો બે ત્રિકોણોનું ક્ષેત્રફળ સરખું હોય તો તે ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે બરોબર છે કે નહિ ?

(૪) આસિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવા પ્રકારનો છે ? એને મળતો પુરાવો આગળ કયા સિદ્ધાંતોમાં આવી ગયો છે ?

પહેલા ૨૬ સિદ્ધાંતો ઉપરથી થતા પ્રશ્નો.

૧. પાંચમા સિદ્ધાંતમાં ધારો કે ફક્ત અને બગ લીટીઓ હ બિંદુમાં છેદેછે; તો ફહ=ગહ.

૨. અબ પાયાની એકજ દિશાએ અબક, અબડ ત્રિકોણો છે; અને અક=બડ છે, અને અડ=અક છે; જો અડ, અક લીટીઓ હ બિંદુમાં છેદે તો અહઅ ત્રિકોણો સમદ્વિબાજુ થશે.

૩. જો બે કાટખૂણુ ત્રિકોણોમાં એકનો કણુ તથા એક

બાજૂ અનુક્રમે ખીજના કર્ણ તથા એક બાજૂની ખરોખર હોય તો ત્રિકોણી સરખાજ થશે. (ઉલટો પુરાવો.)

૪. એક ત્રિકોણ એવો બનાવો કે જેની બે બાજૂઓ અને અન્તર્ખૂણો આપેલી બે લીટી અને એક ખૂણાની અનુક્રમે ખરોખર હોય.

૫. એક સમદ્વિબાજૂ ત્રિકોણના પાયાના છેડાના બિંદુઓમાંથી સામી બાજૂ ઉપર લંબ દોરિયે તો તે સરખા થશે.

૬. એક ખૂણાને દુભાગનારી લીટીનું કોઈપણ બિંદુ તે ખૂણાની બાજૂઓમાંથી સમાન્તર છે.

૭. એક લીટીના મધ્યબિંદુમાંથી તેને છેદે એવી ખીજ લીટીદોરી; અને પહેલી લીટીના છેડાના બે બિંદુઓમાંથી તે ખીજ લીટી ઉપર લંબ દોરીશું તો તે સરખા થશે.

૮. એક લીટીની એકજ દિશાએ બે બિંદુઓ આપેલાં છે, તેમાંથી બે લીટીઓ એવી દોરો કે આપેલી લીટીને એકજ બિંદુમાં મળે અને તેની સાથે સરખા ખૂણા કરે.

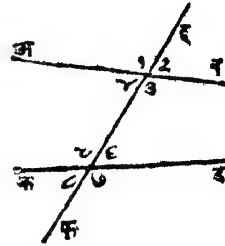
૯. એક આપેલી લીટીમાં એક એવું બિંદુ શોધી કહોડો કે બે એકેકને છેદતી લીટીઓમાંથી સમાન્તર હોય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે?

૧૦. એક આપેલા બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તેના ઉપર બે આપેલાં બિંદુઓમાંથી લંબ દોરિયે તે સરખા થાય. એમ કરવું ક્યારે અસંભવિત છે?

આવતા સિદ્ધાંતોની સમજણ.

હવે પછી સિદ્ધાંતો મુખ્ય કરીને સમાન્તર લીટીઓને લગતા તથા સમાન્તરબાજૂ અનુષ્ઠાણને લગતા આવશે. એ બન્નેની વ્યાખ્યાઓ તો વ્યાખ્યા ૩૫-૩૬ માં આવી ગઈ છે.

ન્યારે એક લીટી, જેવકિ ફક્ત એ સીધી લીટીઓ, જેવકિ અબ અને કડ, ની ઉપર પડેછે, ત્યારે આકૃતિમાં બતાવ્યા છે, તે પ્રમાણે આઠ ખૂણાઓ થઈ શકે. એ ખૂણાઓનાં જૂદાં જૂદાં નામે આપવામાં આવ્યાં છે. તે યાદ રાખવાં.



૧, ૨, ૭, ૮ ખૂણા બહારના ખૂણા કહેવાયછે.

૩, ૬, ૫, ૮ ખૂણા માંહેના ખૂણા કહેવાયછે.

૪ અને ૬ ખૂણા એકેકના વ્યુત્ક્રમખૂણા કહેવાયછે, તેમજ ૩ અને ૫ ખૂણા પણ એકેકના વ્યુત્ક્રમખૂણા.

૨ અને ૬ મરબાવિયે તો ૨ ને બહારનો અને ૬ ને તેજ દિશા ઉપરનો માંહેના સાંભેનો ખૂણો કહેછે.

તેજ સંબંધ ૧ અને ૫ તથા ૪ અને ૮ તથા ૩ અને ૭ વચ્ચે છે.

એટલે ૧ બહારનો ખૂણો અને ૫ તેજ દિશા ઉપરનો માંહેનો સાંભેનો ખૂણો; ઇત્યા.

સમાન્તર લીટીઓને લગતા સિદ્ધાંતોનો મુખ્ય આધાર ૧૨ મા પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ઉપર રહેલો છે. તે ટીકા સહિત બરોબર સમજવું.

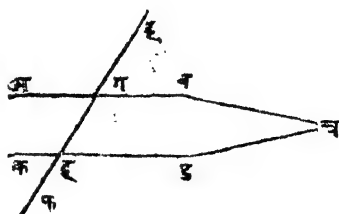
ઉપલી આકૃતિમાં ૩ અને ૬ ખૂણા મળીને એ કાટખૂણા કરતાં ઓછા લાગેછે; અને તેથી બ અને ક છે એ લંબાવીશું તો બને લીટીઓ મળશે; તેથી ઉલટું ૪ અને ૫ ખૂણા એ કાટખૂણા કરતાં વધારે છે, માટે અ અને ક એકેકથી દૂરદૂર જતા થશે.

સિદ્ધાંત ૨૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધી લીટી બીજી એ સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને વ્યુત્ક્રમ ખૂણાઓ બરોબર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે હવે સીધી-
લીટી અવ વ્યને કડ
સીધીલીટીઓને ગ વ્યને
હ બિંદુઓમાં એવી
રીતે છેદે છે કે બિંદુકેન્દ્ર



ખૂણાઓ અગ્રહ વ્યને ગહડ એકેકની બરાબર છે.

તો અવ વ્યને કડ સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

જો અવ વ્યને કડ સમાન્તર ન હોય, તો એ લીટીઓ
લંબાવતાં વ વ્યને ડ તરફ, અથવા અ વ્યને ક તરફ
મળવી જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે એ લીટીઓ વ વ્યને
ડ તરફ લંબાવતાં વ બિંદુમાં મળે છે.

ત્યારે ચગ્રહ એક ત્રિકોણ થયો, જેની બે બાજુઓ ચગ
વ્યને ચહ છે, વ્યને જેનો પાયો ગહ છે.

હવે ચગ બાજુ અ બિંદુ સુધી લંબાવી છે, માટે

બહારનો ખૂણો અગ્રહ માંહેના સામેના ખૂણો ગહચ
કરતાં મહોટો છે. (૧. ૧૬)

પણ એ બે ખૂણો તો સરખા આપેલા છે. (પ્રતિ.)

એટલે, એ બે ખૂણો નહાના મહોટા પણ છે વ્યને વળી
સરખા પણ છે. એ વ્યસંભવિત છે.

માટે અવ વ્યને કડ લીટીઓ વ વ્યને ડ તરફ લંબાવતાં
મળી શકશે નહિ.

એમજ એમ પણ સિદ્ધ થઈ શકે, કે અ વ્યને ક
તરફ પણ લંબાવતાં મળશે નહિ.

માટે એ બે લીટીઓ સમાન્તર છે.

માટે જો એક સીધીલીટી ધો.

પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) જ અને ક તરફથી લીટીઓ મળે એ અસંભવિત છે એવું બતાવો.

(૨) જો જૂદીજૂદી બાજુ ઉપરના બહારના એ ખૂણાઓ સરખા હોય તો લીટીઓ સમાન્તર થશે.

(૩) આ સિદ્ધાંતનો પુરાવો કેવી જાતનો છે? અને કયા કયા સિદ્ધાંતોમાં એવો પુરાવો આવી ગયો છે?

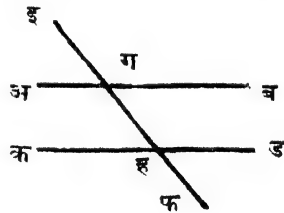
સિદ્ધાંત ૨૮. પ્રમેય.

પ્રતિપાઠ:—જો એક સીધી લીટી બીજી એ સીધી લીટીઓ ઉપર પડીને (૧) બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની યરો-યર કરે; અથવા (૨) તે લીટીની એકજ બાજુના એ માંહેના ખૂણા મળીને એ કાઠખૂણા યરાયર કરે, તો તે બે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે ફક સીધી લીટી, અવ અને કડ સીધી લીટીઓને ગ અને હ બિંદુઓ-માં છેદે છે; અને

(૧) બહારનો ખૂણો ફગથ તેજ બાજુ ઉપરના માંહેના સામેના ખૂણા ગહડ ની યરોયર છે;



તો અવ અને કડ સમાન્તર થશે.

અથવા (૨) ફક લીટીની એકજ બાજુના એ માંહેના ખૂણા ગથહ અને ગહડ મળીને એ કાઠખૂણા યરોયર છે તો અવ અને કડ સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

ફગથ ખૂણો ગહડ ખૂણાની યરોયર છે, (પ્રતિ.)

પણ હગલ ખૂણો સામસામેના ખૂણા અગલ ની
પરોપર છે. (૧.૧૫)

માટે અગલ ખૂણો ગહડ ખૂણાની પરોપર છે; (પ્ર.પ્ર.૧)

પણ એતો વ્યુત્કંભખૂણાઓ છે;

માટે અલ વ્યને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧.૨૭)

(૨) લગલ વ્યને ગહડ ખૂણાઓ મળીને બે કાટ-

ખૂણા પરોપર છે;

પણ પાસપાસેના ખૂણાઓ લગલ વ્યને અગલ મળી-
ને પણ બે કાટખૂણાની પરોપર છે. (૧.૧૩)

માટે લગલ વ્યને અગલ ખૂણા લગલ વ્યને ગહડ ખૂ-
ણાની પરોપર થયા.

તેમાંથી સાધારણ ખૂણો લગલ કહાડીલો.

તો બાકીનો ખૂણો અગલ તે બાકીના ખૂણા ગહડ ની
પરોપર થયો.

પણ એતો વ્યુત્કંભખૂણાઓ છે.

માટે અલ વ્યને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે. (૧.૨૭).

માટે જો એક સીધી લીટી ૪૦. પ્ર.સિ.

ટીકા:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી એમું દેખાયછે, કે જો લગ
લીટીથી લગલ ખૂણો ગહડ ખૂણાના ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાની પરો-
પર થાય, તો લગ લીટી હડને સમાન્તર થશે. આરમા પ્રત્યક્ષ-
પ્રમાણમાં એમું ધારેલું છે, કે એક લીટીથી ગહડની સાથે ગહડની
ન્યૂનતાપૂરક ખૂણાના કરતાં ન્હાનો ખૂણો થાય, તો તે લીટી
હડને સમાન્તર થશે નહિ; અને તેથી જો લંબાવી તો તેને મળશે.
માટે અરે અહિં પ્રત્યક્ષપ્રમાણ તો એજ કે, બે સીધી લીટીઓ
જેઓ અરસ્પરસને છેદેછે, તેઓ બન્ને એકજ સીધો લીટીની
સાથે સમાન્તર થઈ શકતો નથી.

આરમું પ્રત્યક્ષપ્રમાણ ૨૯ મા સિદ્ધાંતને માટે અગત્યનું છે;

પણ એ પ્ર. પ્ર. ખરેખર પ્રત્યક્ષ નથી માટે એ સિદ્ધાંત એ પ્રમાણના આધાર વગર સિદ્ધ કરવાને ઘણું એક પ્રયત્નો થયાં છે; પણ તેમાંકોઈ પણ એવું નથી કે એ પ્ર. પ્ર. વાપરવાને જે હરકત લાગે છે તેથી આછી હરકત તેને લાગે.

અર્થ.

(૧) કહક અને અગહ ખૂણા પરોપર છે; તે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

(૨) અગહ અને ગહક મળી બે કાટખૂણા પરોપર છે; તે લીટીઓ સમાન્તર થશે.

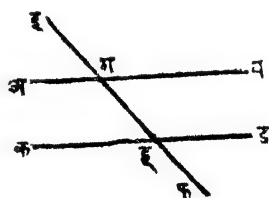
(૩) જે લીટીઓ એકજ સીધીલીટીને લગ્ય છે તે એકેકને સમાન્તર છે.

સિદ્ધાંત ૨૯. પંચમ.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક સીધીલીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ ઉપર પડે તો તે વ્યુત્કમખૂણાઓ એક બીજાની પરોપર કરશે; અને બહારનો એક ખૂણો તે લીટીની તેજ દિશા તરફના માંહેના સામેના ખૂણાની પરોપર કરશે; અને તે લીટીની એકજ બાજુના બે માંહેના ખૂણા મળીને બે કાટખૂણા પરોપર કરશે.

સાધન.

ધારો કે ક્ક સીધી લીટી બે સમાન્તર સીધી લીટીઓ અબ અને કડ ઉપર પડે છે.



તો (૧) વ્યુત્કમખૂણાઓ

અગહ, ગહક એક બીજાની પરોપર થશે.

(૨) બહારનો ખૂણો ક્કગ માંહેના એકજ તરફના સામેના ખૂણા ગહક ની પરોપર થશે;

(૩) એકજ તરફના બે માંહેના ખૂણાઓ બગહ, ગહડ મળીને બે કાટખૂણા બરોબર થશે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો અગહ ખૂણો ગહડ ખૂણાની બરોબર ન હોય, તો એ બેમાંનો એક ખીજા કરતાં મોટો હોવો જોઈએ.

જો એમ બની શકે તો ધારો કે અગહ ખૂણો ગહડ કરતાં મોટો છે ;

એ દરેકમાં બગહ ખૂણો ઉમેરો ;

ત્યારે અગહ અને બગહ ખૂણા મળીને બગહ અને ગહડ ખૂણા કરતાં મોટા થયા.

પણ પાસપાસેના ખૂણા અગહ અને બગહ તો બે મળીને બે કાટખૂણાની બરોબર છે ; (૧. ૩૩)

માટે, બગહ અને ગહડ ખૂણા તો બે મળીને બે કાટખૂણા કરતાં નહાના થયા ;

માટે અવ અને કડ લીટીઓ બ અને ડ તરફ લંબાવતાં મળવી જોઈએ ; (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

પણ એ લીટીઓ તો મળેજ નહિ ; કેમકે તેઓ સમાન્તર છે. (પ્રતિ.)

માટે, અગહ ખૂણો ગહડ કરતાં મોટો નથી ;

તેમજ ગહડ ખૂણો અગહ કરતાં મોટો નથી એ સિદ્ધ થશે ;

એટલે એ વ્યુત્ક્રમખૂણાઓ બરોબર છે.

(૨) અગહ ખૂણો સામસામેના ખૂણા ફગબ ની બરોબર છે ; (૧. ૧૫)

પણ અગ્રહ ખૂણો તો ગહડ ખૂણાની યરોયર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

માટે અહારનો ખૂણો દગબ માંહેના સામેના ખૂણા
ગહડ ની યરોયર થયો.

(૩) દગબ ખૂણો ગહડ ખૂણાની યરોયર છે;
(સિદ્ધ કીધું.)

એ દરેકમાં વગહ ખૂણો ઉમેરો;

ત્યારે દગબ, વગહ ખૂણા વગહ, ગહડ ખૂણાની યરો-
યર થયા; પણ પાસપાસેના ખૂણા દગબ, વગહ તો એ
મળીને એ કાટખૂણાની યરોયર છે; (૧. ૧૩)

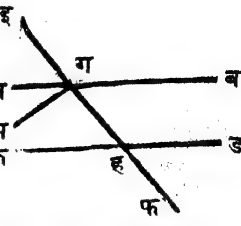
માટે, માંહેના એ ખૂણા વગહ, ગહડ પણ એ મળીને
એ કાટખૂણાની યરોયર છે.

માટે, જો એક સીધીલીટી એ સમાન્તર સીધીલીટી-
ઓ ઉપર પડે, ઇ. ૦. પ્ર. સિ.

ટીપ્પણ:—આ સિદ્ધાંતનો આધાર યુક્તિહીનના પારમા પ્ર. પ્ર.
ઉપર રહેલો છે; માટે સમાન્તર લીટીઓના ગુણોનો આધાર
તે ઉપર છે. પણ તે પ્ર. પ્ર. સમજવામાં સહેલું નથી; અને
વળી અરેબિક પ્રત્યક્ષ પણ નથી. માટે તે પ્ર. પ્ર. નો આધાર
ન લેતાં ઉપલો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરવાને ત્રિસ યત્નો થયાં છે; પણ
તેમાંની કોઈપણ રીતે મુશ્કેલી બિલકુલ દૂર થતી નથી. તોપણ
સૌમાં ઝાઝી અડચણ વાળી રીત “પ્લેટ્ટર” ના પ્રત્યક્ષ પ્ર-
માણુની છે; તે નીચે આપી છે:—

પ્ર. પ્ર. “જો એ લીટી એકેકને છેદે તો તે બન્ને એકજ સીધી-
લીટીને સમાન્તર હોઈ શકે નહિ.” આ પ્ર. પ્ર. મુશ્કિલ નથી;
એમાં જો કંઈ છે, તે ઘણુંકરીને પ્રત્યક્ષજ છે. આ ઉપરથી
૨૯ મા સિદ્ધાંત નીચે પ્રમાણે સિદ્ધ થાય છે:—

(૧) અબ અને કડ આપેલી રૂ સમાન્તર લીટીઓ છે; તો અગ્રહ ખૂણા = ગહડ થશે. જો તેમ ન હોય અ તો ધારે કે અગ્રહ મોટો છે; તેમાંથી પ પગહ ખૂણા ગહડ બરાબર કાપો. હવે પગહ = ગહડ; માટે પગ લીટી કડ ને સમાન્તર છે; (૧.૨૭) પણ અગ્ર લીટી પણ કડ ને સમાન્તર આપેલી છે. એ ઉપલા પ્ર. પ્ર. ની વિરુદ્ધ છે. માટે અગ્રહ ખૂણા ગહડ ખૂણા કરતાં મોટો નથી; તેમજ નહાનો પણ નથી; એટલે સરખો છે.



(૨) અને (૩) ઉપરના સિદ્ધાંત પ્રમાણેજ સિદ્ધ થશે.

ઉપલા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપરથી કેટલાક સહેલા ઉપસિદ્ધાંતો નિકળી શકે છે; તેઓની સિદ્ધતા પ્રત્યક્ષ છે; પણ તે ઉપસિદ્ધાંતો કાંઈ પુરાવામાં વપરાતા નથી; તેઓ નીચે પ્રમાણે છે:—

(૧) એ સમાન્તર લીટીઓ માંહેલી એક ઉપર જો એક સીધી લીટી લંબ હોય તો તેને લંબાવતાં તે બીજી લીટી ઉપર લંબ થશે.

(૨) એ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે જે જૂદા જૂદા લંબોના ભાગો પડે છે તેઓ સરખાજ છે.

(૩) એ સમાન્તર સીધી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરી હોય તો તે એ લંબો એકજ લીટીમાં થશે; અથવા સમાન્તર થશે.

(૪) એ છેદનારી લીટીઓમાંની દરેક ઉપર એકેક લંબ દોરિયે તો તે લંબો સમાન્તર હોઈ શકે નહિ.

પ્રશ્ન.

(૧) અગ્રહ અને ડહક ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.

- (૨) વગર અને ઢહક ખૂણા સરખા છે એવું સિદ્ધ કરો.
 (૩) ફગવ અને ઢહક મળીને એ કાટખૂણા બરોબર થશે.
 (૪) ૨૯ માંના ત્રણ ભાગોના વ્યત્યાસ કયા સિદ્ધાંતોમાં સિદ્ધ થઈ ગયા છે, તે બતાવો.

૨૭-૨૮-૨૯ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એ લીટીઓ અબ અને કડ એક બીજીને ૬ બિંદુમાં દુભાગેછે; તો અક લીટી બડ ને સમાન્તર થશે.

(૨) જે લીટીઓ એકજ લીટીને લંબ છે, તે લીટીઓ એકેકને સમાન્તર છે.

(૩) જો એ લીટીઓ અરસ્પરસ બીજી એ લીટીને સમાન્તર હોય તો પહેલી એ લીટીઓ વચ્ચેના ખૂણા બીજી બેની વચ્ચેના ખૂણાની બરોબર છે.

(૪) જો એ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે બન્નેથી સરખે અન્તરે એક બિંદુ લઈને તેમાંથી એ લીટીઓ દ્વારિયે, તો તેથી સમાન્તર લીટીઓના જે એ ભાગ થશે તે સરખા થશે.

(૫) એ સીધી લીટીઓ એકેકને છેદેછે; તેઓ બીજી એ સીધી લીટીને અરસ્પરસ સમાન્તર છે; તો તેઓની વચ્ચેના ખૂણા બરોબર થશે.

(૬) એક ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી તે ખૂણાને દુભાગનારી એક લીટી પાયા સુધી દોરી તો જે બિંદુમાં તે પાયાને છેદેછે તેમાંથી ત્રિકોણની બાજુઓને જે સમાન્તર લીટીઓ તેજ ત્રિકોણમાં દોરીશું, તે બરોબર થશે.

(૭) એ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે કોઈ પણ સીધી લીટી દોરીને તેના મધ્યબિંદુમાંથી એક બીજી લીટી તે સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે દોરીશું તો તે પણ તેજ બિંદુમાં દુભાગશે.

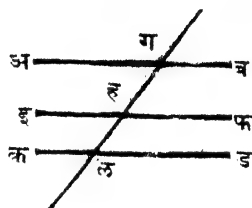
(૮) કોઈ ત્રિકોણના એક બહારના ખૂણાને દુભાગનારી લીટી એક બાજુને સમાન્તર હોય તો તે ત્રિકોણ સમદ્વિબાજુ થશે.

સિદ્ધાંત ૩૦. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એ સીધી લીટીઓ એકજ સીધી લીટીની સાથે સમાન્તર હોય, તો તેઓ એકેકને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે એ સીધી લીટીઓ
અબ, કડ દરેક હફ ને સમા-
ન્તર છે;
તો અબ, કડ ને સમાન્તર
થશે.



સિદ્ધતા.

અબ અને કડ સમાન્તર લીટીઓને ગહ કાપેછે,

મોટે અગ્રહ ખૂણો તેના વ્યુત્કંઠખૂણા ગહફ ની ઘરો-
બર છે. (૧. ૨૬)

અને, હફ અને કડ સમાન્તર લીટીઓને ગહલ છેદેછે,

મોટે બહારનો ખૂણો ગહફ માંહેના ખૂણા હલડ ની
ઘરોબર છે; (૧. ૨૬)

પણ, ઉપર બતાવ્યું કે ગહફ ખૂણો તો અગ્રહ ની ઘરો-
બર છે.

મોટે અગ્રહ ખૂણો હલડ ખૂણાની ઘરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

અને એ ખૂણાઓ વ્યુત્કંઠ મ છે;

મોટે અબ લીટી કડ ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

મોટે જો એ સીધી લીટી ઇ.

પ. સિ.

ટીપ:—૨૯ માં સિદ્ધાંતની ટીપમાં આપેલા “પ્લેટફોર્મ”ના પ્ર. પ્ર. થી આ સિદ્ધાંત તુરત થઈ શકેછે; કેમકે જો એ લીટીઓ સમાન્તર ન હોય તો મળવી જોઈએ; પણ જો મળે તો દરેક ફક્ત લીટીને સમાન્તર હોય નહિ; (પ્ર. પ્ર.) જે પ્રતિ-માથી વિરુદ્ધ છે.

વળી એ પણ જોવાનું છે કે આ સિદ્ધાંત એક રીતે બિલકુલ પ્રત્યક્ષ છે, કારણ કે જો અબ અને કડ લીટીઓ ફક્ત લીટી જે તેઓની વચ્ચે આપેલી છે તેને મળી શકતીજ નથી (પ્રતિ.) તો તેઓ એકેકને પણ મળી શકેજ નહિ; એટલે સમાન્તરજ હોવી જોઈએ.

આકૃતિમાં અબ અને કડ લીટીઓને એ બાજુએ દોરીને ફક્ત ને વચ્ચેમાં દોરી છે, પણ ફક્ત લીટી એક છેડેથી દોરીને પણ સિદ્ધાંત થઈ શકેછે.

પ્રશ્ન.

(૧) એ સમાન્તર લીટીમાંથી એકને છેદનારી લીટી ખી-જીને મળવીજ જોઈએ.

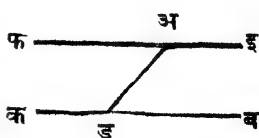
(૨) આકૃતિમાં આપેલી લીટીઓ જુદી રીતે ગોઠવીને એજ સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

સિદ્ધાંત ૩૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલા બિંદુમાંથી એક આપેલી સીધી લીટીને સમાન્તર એક સીધી લીટી દોરવી.

સાધન.

ધારો કે અ આપેલું બિંદુ છે;
અને બક આપેલી સીધી લીટી છે;
તો અ બિંદુમાંથી બક લીટીને
સમાન્તર એક લીટી દોરવાની છે.



રચના.

વક લીટીમાં એક બિંદુ હ લો; અને અ, હ બિંદુઓ સાંધો.

હઅ લીટીમાં અ બિંદુ આગળ હઅહ ખૂણો અડક ખૂણાની ખરોખર, અડની સામી બાજુએ બનાવો; (૧.૨૩) અને હઅ ને ફ સૂધી લંબાવો.

તો હફ લીટી કબને સમાન્તર થશે.

સિદ્ધતા.

અડ લીટી એ સીધી લીટીઓ હફ, વક ને મળેછે, અને વ્યુત્કંભ ખૂણા હઅહ, અડક ખરોખર કરેછે.

મોટે હફ લીટી વક ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

અને તે અ બિંદુ માંથી દોરી છે.

ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) અ બિંદુ આગળ અડક ખૂણાની ખરોખર ને ખૂણા બનાવ્યો છે તે અડક નીજ નિશા તરફ બનાવ્યો હોય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ થાય કે નહિ?

(૨) આપેલા બિંદુમાંથી એકજ સમાન્તર લીટી દોરાય કે વધારે?

(૩) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે તે એક આપેલી લીટી સાથે એક આપેલા ખૂણા ખરોખર ખૂણા કરે.

(૪) એક આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરો કે એ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે આવેલા તેના ભાગ એક આપેલી લીટીની ખરોખર થાય; આ ક્યારે અશક્ય છે?

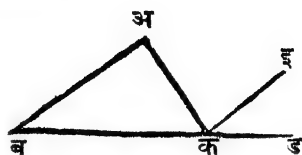
સિદ્ધાંત ૩૨. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણની એક બાજુ લંબાવી, તો બહારનો ખૂણો માંહેના અને સામેના એ ખૂણા-

ઘોની યરોયર થશે; ઘ્યને હરેક ત્રિકોણના ત્રણ માં-
હેના ખૂણાઓ મળીને એ કાટખૂણા યરોયર થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક વ્યાપેલો
ત્રિકોણ છે; જેની એક બક
યાજૂ ડ ખિદુ સૂધી લ-
યાવી છે.



તો (૧) યહારનો ખૂણો અકડ માંહેના સામેના
ખૂણાઓ કઅબ, અબક ની યરોયર થશે;

ઘ્યને (૨) માંહેના ત્રણ ખૂણાઓ અબક, બકઅ, કઅબ
મળીને એ કાટખૂણા યરોયર થશે.

રચના.

ક ખિદુમાંથી કહ લીટી બઅ ને સમાન્તર દોરો

(૧. ૩૧)

સિદ્ધતા.

બઅ લીટી કહ ને સમાન્તર છે; ઘ્યને તેઓને અક
મળેછે;

મોટ, અકહ ખૂણો તેના વ્યુત્કંઠખૂણા કઅબ ની
યરોયર છે. (૧. ૨૯)

વળી બઅ લીટી કહ ને સમાન્તર છે, ઘ્યને બડ
તેઓને મળેછે,

મોટે યહારનો ખૂણો કકડ માંહેના સામેના
ખૂણા અબક ની યરોયર છે; (૧. ૨૯)

મોટે યહારનો વ્યાખો ખૂણો અકડ એ માંહેના
સામેના ખૂણા કઅબ, અબક ની યરોયર છે.

(૨) વળી, અકડ ખૂણો કબજ, અબક ખૂણાની ય-
રોબર છે, (સિક્ક કીધું)

તે દરેકમાં વકઅ ખૂણો ઉમેરો;

તો વકઅ, અકડ ખૂણા મળીને ત્રણ ખૂણા વકઅ,
કઅબ, અબકની યરોબર થયા. (પ્ર. પ્ર. ૨)

પણ પાસપાસેના ખૂણા વકઅ, અકડ તો એ કાઠખૂણા
યરોબર છે, (૧. ૧૩)

મોટે ત્રણ ખૂણા વકઅ, કઅબ, અબક મળીને પાંચ એ
કાઠખૂણાની યરોબર થયા.

મોટે એક ત્રિકોણની ઇ.

પ્ર. સિ

સહેલા ઉપસિદ્ધતા—(૧) જો એ ત્રિકોણમાં એકના એ ખૂ-
ણાએ અનુક્રમે બીજાના એ ખૂણાએની યરોબર હોય તો
એકનો બાકી રહેલો ત્રિજો ખૂણો બીજાના ત્રિજો ખૂણાની
યરોબર થશે.

(૨) એક કાઠખૂણ ત્રિકોણના એ સાંકડાખૂણા એક બી-
જાના કોટીખૂણા થશે.

(૩) એક કાઠખૂણ સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણનો દરેક સરખે
ખૂણો અર્ધ કાઠખૂણ યરોબર છે.

(૪) જો એક ત્રિકોણનો એક ખૂણો બીજા બેના સર્વાંગા
યરોબર હોય તો તે ખૂણો કાઠખૂણો હોયો જોઈએ.

(૫) એક અતુલકોણાકૃતિના ચાર ખૂણાએ મળીને ચાર
કાઠખૂણા યરોબર છે.

(૬) એક સમબાજુ ત્રિકોણનો દરેક ખૂણો એક કાઠ-
ખૂણાનો હોયો.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સાંકડાખૂણ ત્રિકોણમાં કોઈપણ એ ખૂણા મળીને
ત્રિજો કરતાં મોટા હોવા જોઈએ.

(૨) એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણની એક બાજી લંબાવતાં જે ખૂણા થાય, તેને દુભાગનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે.

(૩) ઉપલા સિદ્ધાંતનો બીજો ભાગ ક્રમ ત્રિકોણના એક શિરોબિંદુમાંથી સામી બાજીને સમાન્તર લીટી દોરીને સિદ્ધ કરો.

(૪) એક સમદ્વિબાજી ત્રિકોણના પાયા ઉપરના ખૂણાએને દુભાગનારી લીટીએ વચ્ચેનો ખૂણો તે પાયાને એક છેડેથી લંબાવતાં જે ખૂણો થાય તેની બરોબર થશે.

(૫) કોઈપણ ત્રિકોણના પાયાને બન્ને છેડેથી લંબાવ્યા તો બહારના બે ખૂણાના સર્વાંશમાંથી ટોચનો ખૂણો બાદ કરતાં બે કાટખૂણા બાકી ગેરો.

(૬) એક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં કાટખૂણાના શિરોબિંદુથી એક લીટી સામેની બાજીના મધ્યબિંદુ સુધી દોરી હોય, તો તેથી બે સમદ્વિબાજી ત્રિકોણ થશે.

(૭) એક સમયાદ સીધી લીટીના એક છેડાથી તે લીટી લંબાવ્યા વિના તે લીટી ઉપર એક લંબ દોરો.

(૮) એક કાટખૂણાના ત્રણ મર્યાબાગ કરો.

ઉપરનો સિદ્ધાંત ઘણાજ અગત્યનો છે; અને તેના ઉપરથી નિકળતા કેટલાક ઉપસિદ્ધાંતો અને તેને લગતા કેટલાક પ્રશ્નો ઉપર આપ્યા છે. પણ એ સિદ્ધાંત ઉપરથી બે ઉપસિદ્ધાંતો ઘણાજ અગત્યના નિકળે છે; અને તે ૩૨ મા સિદ્ધાંતના પહેલા અને બીજા ઉપસિદ્ધાંતને નામે પ્રખ્યાત છે. તેમનો ઉપયોગ ગણિતમાં વારંવાર થાય છે. માટે તેમની આકૃતિ, રચના, સિદ્ધતા, વગેરે નીચે અનુક્રમે આપ્યાં છે.

સિદ્ધાંત ૩૨માનો ઉપસિદ્ધાંત પહેલો.

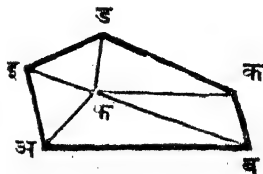
કોઈપણ સીધીલીટીઆકૃતિના બધા માંહેના ખૂણામાં ચાર

કાટખૂણા ઉત્તરિયે તો તે સર્વાંગો આકૃતિની જેટલી બાજુઓ
હોય તેના બમણા કાટખૂણા બરોબર થાય.

ધારો કે અબકડ઼ એક સીધી-

લીટીઆકૃતિ છે.

તેમાં એક ક બિંદુ લીધું; અને
તેને આકૃતિના દરેક બિંદુ સાથે
સંધ્યું.



તો જેટલી બાજુ આકૃતિની છે તેટલા તે આકૃતિમાં ત્રિ-
કોણો થયા.

અને દરેક ત્રિકોણના ત્રણ ખૂણાઓ મળીને બે કાટખૂણા
બરોબર છે;

મોટે એ બધા ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓનો સર્વાંગો તે
આકૃતિની જેટલી બાજુઓ છે તેથી એવડા કાટખૂણા જેટલા
થયા.

પણ એ ત્રિકોણોના બધા ખૂણાઓ લઈએ તો તે આ-
કૃતિના બધા માંહેના ખૂણાઓ અને ક બિંદુ આગળના બધા
ખૂણા થયા.

વળી ક બિંદુ આગળનાં બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણા
બરોબર છે. (૧.૧૫.ઉપ.)

મોટે આકૃતિના બધા માંહેના ખૂણા અને ચાર કાટખૂણા
મળીને આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ છે તેથી એવડા કાટખૂ-
ણાની બરોબર છે.

પ્ર. સિ.

સિદ્ધાંત ઉરમાનો ઉપસિદ્ધાંત ખીજો.

જે કોઈપણ સીધીલીટીઆકૃતિની દરેક બાજુ અનુક્રમે
એકજ દિશા તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓ સર્વ મ-
ળીને ચાર કાટખૂણા બરોબર થશે.

દરેક શિરોબિંદુ આગળ માંહેના
ખૂણા અને બહારના બન્ને મળીને
એ કાટખૂણા બરોબર છે; (૧.૧૩)
માટે બધા માંહેના અને બધા



બહારના ખૂણા મળીને આકૃતિની જેટલી બાજુ છે તેથી
બમણા કાટખૂણા બરોબર છે.

પણ માંહેના ખૂણાઓ અને ચાર કાટખૂણા મળીને પણ આ-
કૃતિની બાજુના બમણા કાટખૂણા બરોબર છે. (૧.૩૨. ઉપ.૧)

માટે માંહેના ખૂણાઓ તથા બહારના ખૂણાઓ મળીને માંહે-
ના ખૂણાઓ તથા ચાર કાટખૂણાની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર.૧)

માટે બહારના બધા ખૂણા મળીને ચાર કાટખૂણાની બરો-
બર છે. (પ્ર. પ્ર. ૩) પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—આ ઉપરથી કેાઈ પણ સીધીલીટી આકૃતિમાં બધા
મળીને કેટલા કાટખૂણા થાય તે તુરત જાણી શકાય; જેમકે, તે આ-
કૃતિને ૮ બાજુઓ હોય તો તેના માંહેના ખૂણા બધા મળીને
 $૧૬-૪=૧૨$ કાટખૂણા જેટલા થશે. વળી જો આપેલી આકૃતિ
ઓળી હોય કે તેના બધા ખૂણા સરખા જ છે, તો દરેક ખૂણાના
મહત્ત્વનો નિશ્ચય થશે. જેમકે, ૮ બાજુની આકૃતિના સર્વ ખૂણા
સરખા હોય તો દરેક ખૂણા $\frac{૧૨}{૮}$ અંશ હશે કે કાટખૂણા બરોબર
થવા જોઈએ.

વળી દરેક આકૃતિના ખૂણાઓનો સર્વાંગી કાટખૂણાની
બેકી સંખ્યાઓની બરોબર છે; કેમકે બાજુઓની સંખ્યાની
બમણાઈ આવશ્યક બેકી છે, અને તેમાંથી ચાર બેકી સંખ્યા
બાદ કરીથી તો બાકી બેકી રહેશે.

વળી માંહેના ખૂણા બધા મળીને કેટલા કાટખૂણા બરો-
બર છે તે જાણવાથી તે આકૃતિની બાજુઓની સંખ્યા માલમ

પડી શકેછે: કેમકે કાટખૂણાની સંખ્યામાં ચાર ઉમેરીને તેનું અર્ધ લઈએ તો બાજુઓની સંખ્યા આવે.

સિદ્ધાંત ૩૨ ના ઉપસિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમકોણ અને સમબાજુ પટકોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું?

(૨) એવાજ એક પટકોણની એક બાજુ લંબાવી તો બહારનો ખૂણો એક સમબાજુ ત્રિકોણના ખૂણાની બરાબર થશે.

(૩) એક બહુકોણ આકૃતિની ન બાજુઓ છે; અને તે આકૃતિના બધા ખૂણા સરખા છે; તો દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કેટલું?

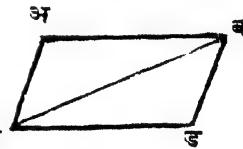
(૪) એક બહુકોણ આકૃતિની આંતરે આંતરેની બાજુઓ લંબાવિયે તો જે બિંદુઓમાં તે બાજુઓ છેદશે ત્યાંના બધા ખૂણાઓમાં આઠ કાટખૂણા ઉમેરિયે તો તે આકૃતિમાં જેટલી બાજુઓ હોય તેથી બમણા કાટખૂણા બરાબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૩. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:— બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓના એકજ તરફના છેડા સાંધનારી સીધી લીટીઓ પણ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

સાધન.

ધારો કે અબ અને કડ બે સરખી અને સમાન્તર સીધી લીટીઓ છે; અને ધારો કે તેઓને એકજ બાજુએથી અક અને કડ લીટીઓ સાંધેછે.



તો અક અને કડ જાતે સરખી અને સમાન્તર થશે.

રચના.

બક લીટી દોરો.

સિદ્ધતા.

અવ વ્યને કડ લીટીઓ સમાન્તર છે, વ્યને બક લીટી મળે છે.

મોટે, વ્યુત્કંઠ ખૂણાઓ અવક, બકડ, ખરોખર છે. (૧. ૨૬)

હવે, અવક, ડકવ ત્રિકોણોમાં,

{ અવ લીટી કડની ખરોખર છે. (પ્રતિમા)

{ વ્યને બક લીટી બન્ને ત્રિકોણોમાં સાધારણ છે,

{ વ્યને અવક ખૂણો બકડની ખરોખર છે,

મોટે વ્યે બે ત્રિકોણ સર્વ પ્રકારે સરખા છે; (૧. ૪)

વ્યે હવે, અક પાયો ડક પાયાની ખરોખર છે,

વ્યને અકવ ખૂણો ડકવ ખૂણાની ખરોખર છે;

પણું વ્યે તો વ્યુત્કંઠખૂણા છે;

મોટે અક લીટી બકડ ને સમાન્તર છે. (૧. ૨૭)

વ્યને તેઓ સરખી છે વ્યેમ પણ બતાવ્યું.

મોટે, બે સરખી વ્યને સમાન્તર છે. પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) આ સિદ્ધાંતના બે ભાગ છે તે જૂદા જૂદા લખ્યા અને સિદ્ધ કરો.

(૨) એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર તેની એક જ બાજુએ બે બહાર આપેલાં બિંદુઓમાંથી સરખી લંબ દારી, તો તે બિંદુઓને સાંધનારી લીટી આપેલી લીટીને સમાન્તર થશે.

(૩) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓને દુભાગી; તો તે બે બિંદુઓ સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર થશે, અને પાયાથી અર્ધ થશે.

(૪) આ સિદ્ધાંતની પ્રતિજ્ઞામાં “એકજ તરફના બે છેડા” એવા શબ્દો લખ્યા છે. તેનું કારણ શું?

સિદ્ધાંત ૩૪. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણની સામ-સામેની બાજીઓ પરસ્પરસંબંધિત છે, તેમજ સામ-સામેના ખૂણાઓ પણ પરસ્પર છે; અને એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણને તેની કર્ણલીટી દ્વારા ગેર-સાધન.

સાધન.

ધારો કે અકબ એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ છે, અને વક તેની કર્ણલીટી છે, તો એ વ્યાકૃતિની સામસામેની લીટીઓ તથા સામસામેના ખૂણા પરસ્પર થશે; અને વક કર્ણલીટી તેને દ્વારા ગેર-સાધન.

અવ લીટી કડ ને સમાન્તર છે, અને તેઓને વક મળે છે.

મો: વ્યુત્ક્રમ ખૂણા અવક, ડકવ પરસ્પર છે; (૧. ૨૬) વળી, અક અને વડ સમાન્તર છે, અને તેઓને વક મળે છે,

મો: વ્યુત્ક્રમ ખૂણા અકવ, ડકવ પરસ્પર છે. (૧. ૨૬)

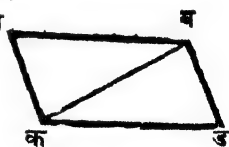
મો, અવક, ડકવ ત્રિકોણોમાં,

અવક ખૂણો ડકવ ખૂણાની અ પરસ્પર છે.

અને અવક ખૂણો ડકવ ખૂણાની પરસ્પર છે;

અને સરખા ખૂણાઓની પાસેની બાજી વક સાધારણ છે;

મો, અવક, ડકવ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે પરસ્પર છે; (૧. ૨૬)



મોટે અથવા લીટી ડકની યરોયર છે ; અને અક, ડકની યરોયર છે ;

અને વચક ખૂણો કડક ખૂણાની યરોયર છે.

વળી, અચક ખૂણો ડકવ ખૂણાની યરોયર છે,

અને કવડ ખૂણો વચક ખૂણાની યરોયર છે,

મોટે આખો ખૂણો અચક આખા ખૂણા ડકવ ની યરોયર છે.

અને એવું સિદ્ધ કીધું કે અચક, ડકવ ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે યરોયર છે,

મોટે કર્ણી લીટી વચક, અકડક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણને દ્વિભાગે છે.

મોટે એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ ઇ

પ્ર. સિ.

પ્રત્ય.

(૧) એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણનો એક ખૂણો કાઠ-ખૂણો હોય તો તેના બધા ખૂણા કાઠખૂણા થશે.

(૨) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બાજુઓ સરખી હોય તો તે સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ થશે.

(૩) જો એક ચતુષ્કોણના સામસામેના ખૂણા યરોયર હોય તો તે સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની બધી બાજુઓ સરખી હોય તે એક ખૂણો કાઠખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાઠખૂણા થશે.

(૫) એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દ્વિભાગે છે.

(૬) જો એક ચતુષ્કોણની કર્ણો એકેકને દ્વિભાગે તો તે ચતુષ્કોણ સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ હોવા જોઈએ.

(૭) જો એક સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણની કર્ણો ખૂણાને દ્વિભાગે તો તે સમાજી ચતુષ્કોણ હોવા જોઈએ.

(૮) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની કણી સરખી હોય તો તેના બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે.

(૯) જો એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ કાટખૂણુ ન હોય તો તેની કણી સરખી થાય નહિ.

(૧૦) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક કણીના મધ્ય-બિંદુમાંથી બે સામસામેની બાજુઓ સ્કંધી એક લીટી દોરી તો તે લીટી તે બિંદુમાં દુભાગશે.

(૧૧) જો બે સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં એકની બે બાજુઓ અનુક્રમે ખીજની બે બાજુઓની બરોબર હોય, અને એકનો માંહેનો ખૂણો ખીજના માંહેના ખૂણાની બરોબર હોય, તો તે સંબાં ચતુષ્કોણો સર્વે પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૨) બે કાટખૂણુ ચતુષ્કોણોમાં જો એકની બે પાસપાસેની બાજુઓ ખીજની બે બાજુઓની અનુક્રમે બરોબર હોય તો તે કાટખૂણુ ચતુષ્કોણો સર્વે પ્રકારે બરોબર થશે.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણમાં એક કણુ ઉપર સામેના બન્ને ખૂણાઓમાંથી લંબ દોરી, તો તે લંબો બરોબર થશે.

પહેલા ૩૪ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) એક ત્રિકોણનો પાયા બન્ને તરફ લંબાવિયે તો બહારના ખૂણાઓને દુભાગનારી લીટીઓથી થયેલા ખૂણા પાયા ઉપરના મોંઢેના બે ખૂણાના સર્વાંગના અર્ધ થશે.

(૨) એક ત્રિકોણના પાયાના ખૂણા દુભાગનારી લીટીઓ વચ્ચેનો ખૂણા શિરોબિંદુના ખૂણામાં પાયાના ખૂણાઓના અર્ધનો સર્વાંગો ઉમેરિયે તેટલો થશે.

(૩) બે ત્રિકોણોમાં એકની બે બાજુઓ બીજાની બે બાજુઓને અનુક્રમે સરખી છે અને સમાન્તર પણ છે, તો ત્રીજી બાજુઓ પણ સરખી અને સમાન્તર થશે.

(૪) જો એક ચતુષ્કોણની સામસામેની બે બાજુઓ સમાન્તર હોય, અને ત્રીજી બે ફક્ત સરખી હોય તો સામસામેના ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક થશે, અને કોણો સરખી થશે.

(૫) ચોરસ, કાટખૂણ ચતુષ્કોણ, અને સમબાજુ ચતુષ્કોણ એ સર્વ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ થવા જોઈએ.

(૬) જો એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક કાંઈ તેની એક બાજુની બરોબર હોય તો તે ચતુષ્કોણના દરેક ખૂણાનું મહત્ત્વ કહોડો.

(૭) બે સરખી અને સમાન્તર લીટીઓના સામસામેના (બુલ્કમ) છેડાઓ સાંધ્યા, તો સાંધનારી લીટીઓ સમાન ક્યારે થશે, અને અસમાન ક્યારે?

(૮) એક ત્રિકોણના બે ખૂણાઓમાંથી સામી બાજુઓ સ્પર્ધી કોઈ પણ લીટીઓ એવી દોરી ન શકાય કે તે અરસ્પરસ એક એકને દુભાગે.

(૯) કોઈ અન્તવાન સીધી લીટીના ગમેતેટલા સરખા ભાગ કરે.

(૧૦) એક કાટખૂણ ત્રિકોણના એક સાંકેતો ખૂણો ખીજ કરતાં ત્રણગણો છે; તો ન્હાના ખૂણને ત્રિભાગો.

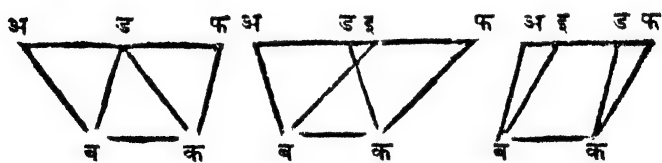
(૧૧) એક સમઘ્રિઆળૂ ત્રિકોણના પાયાના એક છેડામાંથી એક લીટી સામી બાજુ સૂધી, તથા ખીજ બે લીટી પાયાના કોઈ પણ બિંદુમાંથી સામી બાજુએ સૂધી, એવી દોરી છ કે તેઓ પાયા સાથે સરખા ખૂણા કરે, તો પાછલી બે લીટી મળીને પહેલીની બરોબર થશે.

(૧૨) બે આપેલી લીટીઓની વચ્ચે એક એવી લીટી દોરી કે તે એક આપેલી લીટીની બરોબર હોય અને બાજુ બે આપેલી લીટીને સમાન્તર હોય.

(૧૩) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુમાં આપેલા બિંદુમાંથી એક એવી લીટી દોરી કે તે તે બં બાં ચતુષ્કોણને દુભાગે.

સિદ્ધાંત ૩૫. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપરના તથા એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો બરાબર છે.



ધારો કે અબકહ અને હબકફ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો એકજ પાયા બક ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ બક, અરુ ની વચ્ચે છે;

તો એક સં બાં ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ બીજાના ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

સિદ્ધતા.

(૧) જો વ્યાપેલા સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણોની પાયાની સામેની બે બાજુઓ એકજ બિંદુ ૩ માં આવે મળતી હોય, તો દરેક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ, ચક્ર ત્રિકોણનો બનેલો છે; (૧. ૩૪)

માટે તેઓ એકેકની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧).

(૨) પણ જો ચક્ર પાયાની સામેની અડ વ્યને ફક્ત બાજુઓ એકજ બિંદુમાં મળી જતી ન હોય,

તો અચક્ર સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે.

માટે અડ બાજુ ચક્રની બરોબર છે; (૧. ૩૪)

વ્યને તેજ કારણથી ફક્ત લીટી ચક્રની બરોબર છે;

માટે અડ લીટી ફક્તની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે (બીજી આકૃતિ પ્રમાણે) વ્યાપી લીટી ફક્ત,

વ્યથવા (ત્રીજી આકૃતિ પ્રમાણે) બાકી રહેલી ફક્ત

વ્યાપી વ્યથવા બાકી રહેલી ફક્તની બરોબર છે,

માટે ફક્ત, ફક્ત ત્રિકોણમાં;

ફક્ત લીટી ફક્તની બરોબર છે, (સિદ્ધ કીધું)

વ્યને ફક્ત બાજુ સામેની બાજુ અચક્રની બરોબર છે;

(૧. ૩૪)

વ્યને બહારનો ખૂણો ફક્ત માંહેના ખૂણા ફક્તની

બરોબર છે; (૧. ૨૬)

માટે ફક્ત ત્રિકોણ ફક્ત ત્રિકોણની બરોબર છે. (૧-૪)

હવે વ્યાપી આકૃતિ અચક્ર માંથી ફક્ત ત્રિકોણ બાદ કરીશું તો બાકી જે ભાગ રહેશે તે તેજ આકૃતિમાંથી ફક્ત ત્રિકોણ બાદ કરતાં જે ભાગ રહેશે તેની બરોબર થવો જોઈએ. (પ્ર. પ્ર. ૩)

પણ એક ત્રિકોણ બાદ કરતાં તો સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણ
અવકાશ બાકી રહેશે, અને બીજો ત્રિકોણ બાદ કરતાં
સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણ હવેકાશ રહેશે;

મોટે સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણ અવકાશ સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણ
હવેકાશ ની બરાબર છે.

મોટે એકજ પાયા ઉપર છંદ

પ્ર. સિ.

ટીપ્પણ:—આ સિદ્ધાંતની પહેલાં જ્યાં જ્યાં બે આકૃતિ એક-
કેકની બરાબર બતાવવામાં આવી છે, ત્યાં ત્યાં “બરાબર”
શબ્દનો અર્થ સર્વે પ્રકારે બરાબર એવો કીધો છે; જેમકે
૪ થા વર્ગે સિદ્ધાંતોમાં બે ત્રિકોણો બરાબર કીધા છે, એટલે
એવી રીતે કે દરેકની એકેક બાજુ તથા એકેક ખૂણા અનુક્રમે
બીજાની એકેક બાજુ તથા એકેક ખૂણાની બરાબર; અને વળી
તે આકૃતિઓ સ્થાનોપરી પણ થઈ શકે. પણ આ અને હવે-
પછીના કેટલાક સિદ્ધાંતોમાં આકૃતિ બરાબર કીધી છે ત્યાં
“બરાબર” શબ્દનો અર્થ ફક્ત “ક્ષેત્રફળમાં બરાબર” એમ
સમજવો. એક આકૃતિ બીજાના ઉપર સ્થાનોપરી થઈ શકે
અથવા ન થાય તોપણ તેમનું ક્ષેત્રફળ એ સિદ્ધાંતોમાં સરખું
બતાવ્યું છે. જેમકે, બે કાગળ અથવા લાકડાના ત્રિકોણાકાર
અથવા ચતુષ્કોણ કકડા એવા થઈ શકે કે સ્થાનોપરી ન થાય, તે
છતાં તેઓનું ક્ષેત્રફળ (તેમની સપાટીમાં આવેલી જગ્યા)
સરખું હોય.

ટીપ્પણ:—ઉપલી સિદ્ધતાના છેલ્લા ભાગમાં જરા યંચવણ જોવું
છે. બીજી રીત એ ભાગ સિદ્ધ કરવાની એમ છે;—(આકૃતિ ૨.)

ધારી કે જો એને કાઢી દીધા ગયા હોય; તો અવકાશ
અને હવેકાશ ત્રિકોણો સરખા છે, તેમાંથી જોઈ ત્રિકોણ બાદ
કરી, એને જગક ઉમરી; તો સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણો સરખા થશે.

આકૃતિ ૩ માં સરખા ત્રિકોણોમાં અબકડ આકૃતિ ઉમેરો, તો સં આં અતુષ્કોણો સરખા થયા.

પ્રશ્ન.

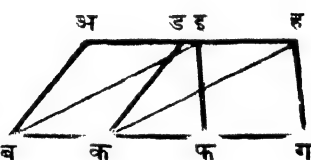
- (૧) ઉપરો સિદ્ધાંત સાધારણ પાયા ઉપર લક્ષ્યને સિદ્ધ કરો.
- (૨) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ બે સરખા સમાન્તરબાજુ અતુષ્કોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે થશે.

સિદ્ધાંત ૩૬. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—અરોપર પાયા ઉપરના અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના સમાન્તરબાજુ અતુષ્કોણો અરોપર છે.

સાધન.

ધારો કે અબકડ અને
ઇફગહ સમાન્તરબાજુ અ-
તુષ્કોણો અરોપર પાયા બક
અને ફગ ઉપર છે, અને
એકજ સમાન્તર લીટીઓ અહ, બગ વચ્ચે છે.



તો સં આં અબકડ સં આં ઇફગહ ની અરોપર થશે.

રચના.

બહ, કહ સાંધો.

સિદ્ધતા.

- બક લીટી ફગ ની અરોપર છે, (પ્રતિ.)
અને ફગ લીટી સામેની બાજુ ઇહ ની અરોપર છે,
(૧. ૩૪)
ત્રાટે, બક લીટી ઇહની અરોપર છે, (પ્ર. પ્ર.૧)

અને તેઓ સમાન્તર પણ છે; (પ્રતિ.)

માટે વહ અને કહ જે તેઓના એકજ તરફના છેડા-
ઓ સાંધે છે તે લીટીઓ પણ સરખી અને સમાન્તર છે.
(૧. ૩૩)

માટે ઇચ્છક સમાન્તરખાળુ ચતુષ્કોણ થયો.

હવે અચ્છક સંખ્યા ચતુષ્કોણ ઇચ્છકની બરોબર છે,
કારણ કે એ એ એકજ પાયા વચ્ચે અને એકજ સમા-
ન્તર લીટીઓ વચ્ચે, અહીં ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

વળી, ઇચ્છક સંખ્યા ચતુષ્કોણ ઇચ્છકની બરોબર છે;
કારણ કે તેઓ એકજ પાયા વહ અને એકજ સમા-
ન્તર લીટીઓ વહ, વચ્ચે ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૫)

માટે, સમાન્તરખાળુ ચતુષ્કોણ અચ્છક સમાન્તર-
ખાળુ ચતુષ્કોણ ઇચ્છકની બરોબર છે. (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે, બરોબર પાયા ઉપર ધૃં મ. ગંત.

ટીપ્પણી:—અંતરધારે છે કે બરોબર પાયાઓને એકજ સીધી
લીટી િ મૂકેલા છે.

ઉપસિદ્ધાંતો:—

(૧) એક સમાન્તરખાળુ ચતુષ્કોણનું ક્ષેત્રફળ તેના પાયાના
સરખા જ પાયા ઉપર તેટલીજ ઉંચાઈના કાટખૂણ ચતુષ્કોણના
ક્ષેત્રફળની બરોબર છે.

(૨) બરોબર પાયા ઉપરના અને બરોબર ઉંચાઈના સમા-
ન્તરખાળુ ચતુષ્કોણ ક્ષેત્રફળમાં બરોબર છે.

(૩) સરખી ઉંચાઈ ॥ સંખ્યા ચતુષ્કોણમાં જેના પાયા
મોટા તેનું ક્ષેત્રફળ પણ મોટું; અને પાયા સરખા હોય તો
જેની ઉંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ૩૫ અને ૩૬મા સિદ્ધાંતોમાં શા ફેર છે?

(૨) ઉપરોક્ત સિદ્ધાંત અનુસાર ડગ લીટીઓ સાંધીને સિદ્ધ કરો.

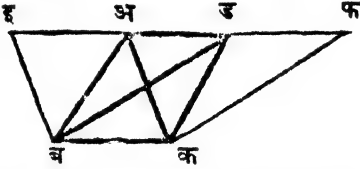
સિદ્ધાંત ૩૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક જ પાયા ઉપર અને એક જ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચેના ત્રિકોણો ઓછામાં ઓછા છે.

સાધન.

એક જ પાયા વક્ર ઉપર અને એક જ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે અને અડ વચ્ચે બે ત્રિકોણો અવક, ડવક છે.

તો અવક ત્રિકોણ હ
ડવક ત્રિકોણની ઓછામાં ઓછા થશે.



રચના.

બંધિત માંથી વડ લીટી કાઢીને સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)
ધારો કે તે ડગ ને લંબાવતાં હ બંધિત માં છેદે છે;
તેમજ ક બંધિત માંથી વડ ને એક સમાન્તર લીટી કાઢી
દોરો ને અડ ને લંબાવતાં ક બંધિત માં છેદે છે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે અવક અને ડવક દરેક વ્યાકૃતિ
એક સમાન્તરપાણી ચતુષ્કોણ છે.

અને વળી તેઓ એક જ પાયા વક્ર ઉપર અને એક જ
સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે, ફક્ત વચ્ચે છે,

માટે, અવક સંપાદન ચતુષ્કોણ ડવકની ઓછામાં ઓછા છે.
(૧. ૩૫)

અને અવક ત્રિકોણ અવક સંપાદન ચતુષ્કોણનો
અર્ધ છે.

કારણ કે અવક કુલ તેને દ્વિભાગે છે; (૧. ૩૪)

વળી ડબક ત્રિકોણ ડબક સં. આં ચતુષ્કોણનો અર્થ છે,

કારણ કે ડક તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

પણ સરખી ચીજોના અર્થ સરખાજ છે. (પ્ર. પ્ર. ૭)

માટે અબક ત્રિકોણ ડબક ત્રિકોણની યરોબર છે;

માટે, એકજ પાયા ઉપર ધં. ધ. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલી આકૃતિમાં ખીજ કયા ત્રિકોણો યરોબર છે ?

(૨) જો અક, વડ લીટીઓ નખિંદુમાં છેદે તો બતાવો કે અનવ, અને કનડ ત્રિકોણો સરખા છે.

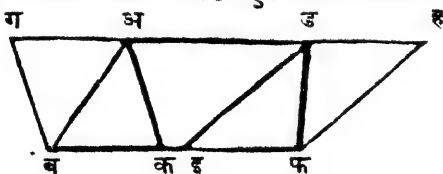
(૩) જો એક સમઆળ ચતુષ્કોણ અબકડની અબ આળમાં એક ખિંદુ પલખને પક, પડદોરી હોય તો, પઅડ, પબક ત્રિકોણ મળીને પડક ત્રિકોણની યરોબર થશે.

સિદ્ધાંત ૩૮. પ્રમેય.

પ્રતિપાઃ—યરોબર પાયાઓ ઉપર અને એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચેના ત્રિકોણો યરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે અબક, ડફ ત્રિકોણો વક, અને ઇફ બે યરો-



બર પાયાઓ ઉપર, અને વક, અડ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

તો અબક ત્રિકોણ ડફ ત્રિકોણની યરોબર થશે.

રચના.

વ ખિદુમાંથી વગ લીટી કઅ ને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે ડઅ લીટીને લંબાવતાં ગ ખિદુમાં છેદેછે; (૧. ૩૧)

ફ ખિદુમાંથી ફહ લીટી હડ ને સમાન્તર દોરો; વ્યને ધારો કે તે અડ ને લંબાવતાં હ ખિદુમાં છેદેછે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણુ ગવકઅ વ્યને ડહફહ દરેક સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ છે,

વ્યને તેઓ યરોયર પાયા વક, ફફ ઉપર છે, વ્યને એકજ સીધી લીટીઓ વફ, ગહ વચ્ચે છે,

માટે ગવકઅ, સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ ડહફહ ની યરો-યર છે; (૧. ૩૧)

વ્યને અવક ત્રિકોણુ ગવકઅ સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુનો અર્ધ છે,

કારણુ કે અવ કર્ણુલીટી તેને દુભાગેછે; (૧. ૩૪)

વ્યને ડહફ ત્રિકોણુ ડહફહ સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુનો અર્ધ છે,

કારણુ કે ડફ તેને દુભાગેછે;

પણુ સરખી ચીજોના અર્ધ સરખા છે; (પ્ર. પ્ર. ૭)

માટે અવક ત્રિકોણુ ડહફ ત્રિકોણુની યરોયર છે.

માટે, યરોયર પાયાઓ ઉપર ધ૦ પ્ર. સિ.

ટીપ્પ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી યિવાં અનુમાન થઈ શકે-છે કે:—

(૧) યરોયર પાયાઓ ઉપરના વ્યને યરોયર હંચાઈના ત્રિકોણુ ક્ષેત્રફળમાં યરોયર છે.

(૨) બે ત્રિકોણુ સરખી હંચાઈના હોય, તો જોના પાયા વધારે

તેનું ક્ષેત્રફળ પણ વધારે; અને જે સરખા પાયા ઉપરના ત્રિકોણોમાં જેના ઉંચાઈ વધારે તેનું ક્ષેત્રફળ વધારે.

પ્રશ્ન.

(૧) ઉપલા જે સિદ્ધાંતોમાં ત્રિકોણો સર્વ પ્રકારે સરખા છે કે કેમ ?

(૨) બન્ને પાયાઓ એકજ લીટીમાં છે તેમ ન લેતાં એક પાયા એકમાં અને બીજો બીજી સમાન્તર લીટીમાં લઈને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૩) એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ જે નહાના મોટા ત્રિકોણો હોય તો તેઓ એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે નથી.

(૪) એક ત્રિકોણના પાયાનું મધ્યબિંદુ શિરોબિંદુ સાથે જોડ્યું હોય, તો જે જે ત્રિકોણો થાય તે બરોબર.

(૫) જો એક ત્રિકોણની જે બાજુઓ અનુક્રમે બીજાની જે બાજુઓની બરોબર હોય, અને માહેલા ખૂણા ન્યૂનતાપૂરક હોય તો તે ત્રિકોણો બરોબર થશે.

(૬) પ્રશ્ન ૪ અને ૫ નો અર્થ એકજ છે તે બતાવો.

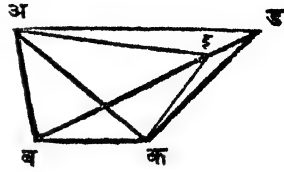
સિદ્ધાંત ૩૯. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એકજ પાયા ઉપર અને તેની એકજ બાજુએ જે બરોબર ત્રિકોણો હોય, તો તેઓ એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે હોવા જોઈએ.

સાધન.

ધારો કે અવક, કવક ત્રિકોણો એકજ પાયા વક ઉપર અને તેની એકજ (ઉપરની) બાજુએ છે; અને તેઓનું ક્ષેત્રફળ બરોબર છે;

તો તેઓ એકજ સમાન્તર
લીટીઓ વચ્ચે થશે; એ લે,
અડ સાંધિયે, તો અડ લીટી વક
ને સમાન્તર થશે.



રચના.

જો અડ લીટી વક ને સમાન્તર ન હોય, તો અ બિંદુ-
માંથી જો બની શકે તો બીજી લીટી અડ, વક ને સમા-
ન્તર દોરો.

ધારો કે તે લીટી વડ ને અથવા તેને લંબાવતાં અ બિં-
દુમાં મળે છે.

ઇક સાંધો.

સિદ્ધતા.

એકજ પાયા વક ઉપર, બંને એકજ સમાન્તર લી-
ટીઓ વક, અડ ની વચ્ચેના ત્રિકોણો અવક, ઇવક બરો-
બર છે; (૧. ૩૭)

પણ અવક ત્રિકોણ ડવકની બરોબર છે; (પ્રતિ.)

માટે ડવક ત્રિકોણ ઇવક ત્રિકોણની પણ બરોબર છે;
(પ્ર. પ્ર. ૧)

આખો ત્રિકોણ તેના ભાગની બરોબર; એ અશક્ય છે.
(પ્ર. પ્ર. ૬)

માટે અડ લીટી વક લીટીને સમાન્તર નથી.

એજ પ્રમાણે, એવું સિદ્ધ થઈ શકે કે અ બિંદુમાંથી
અડ શિવાય કોઈ પણ લીટી વક ને સમાન્તર નથી.

માટે અડ લીટી વક ને સમાન્તર છે.

માટે એકજ પાયા ઉપર ઇં

પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી:—આ મિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાય છે કે એકજ
પાયા ઉપર બરોબર ત્રિકોણો હોય તો તેમની ઉંચાઈ બરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિમાં અડલીટીની નીચે અડ પડે છે; પણ અડ બહાર પડે તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરો.

(૨) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓના મધ્યબિંદુને સાંધનારી લીટી પાયાને સમાન્તર છે.

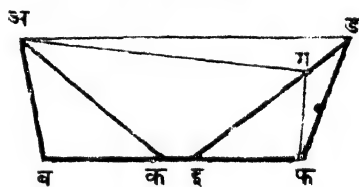
(૩) એજ લીટી પાયાની અર્ધ છે.

સિદ્ધાંત ૪૦. પ્રમેય.

પ્રતિષ્ઠા:—એકજ સીધી લીટીમાં આવેલા બે બિંદુઓ પાયાઓ ઉપર તેની એકજ બાજુએ આવેલા બે બિંદુઓ ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓની વચ્ચે છે.

સાધન.

એકજ સીધી લીટી બધામાં આવેલા સરખા પાયા બધા બિંદુઓ ઉપર બને તેઓની એકજ



(ઉપલી) બાજુએ બે ત્રિકોણો અબક, ડફગ છે ;

તો તે ત્રિકોણો એકજ સમાન્તર લીટીઓ વચ્ચે થશે. એટલે અ ડ બિંદુઓ સાંધીએ તો અડ લીટી બધા ને સમાન્તર થશે.

રચના.

જો અડ લીટી બધા ને સમાન્તર ન હોય તો અ બિંદુમાંથી બની શકે તો, અગ લીટી બધા ને સમાન્તર દોરો.

(૧. ૩૧)

ધારો કે તે ડડ ને (અથવા તેને લંબાવતાં) ગ બિંદુમાં મળે છે,

ગ ફ બિંદુઓ સાંધો.

સિદ્ધતા.

હવે અબક ત્રિકોણ ગદ્દક ત્રિકોણની યરોબર છે ;
કારણ કે તેઓ યરોબર પાયા વક, ક્ક ઉપર, વ્યને
એકજ સમાન્તરલીટીઓ વક, અગ ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)
પણ અબક ત્રિકોણ તો ક્ક ત્રિકોણની યરોબર છે ;
(પ્રતિ.)

માટે ક્ક ત્રિકોણ પણ ગદ્દક ત્રિકોણની યરોબર છે.
આઓ યોતાના ભાગની યરોબર ; એ વ્યશક્ય છે.
(પ્ર. પ્ર. ૯)

માટે અગ લીટી વક ને સમાન્તર નથી.
એજ પ્રમાણે, આપણે બતાવીશું કે અક શિવાય કોઈ
પણ લીટી અબિદુમાંથી વક ને સમાન્તર દોરાય નહિ.
માટે અક લીટી વક ને સમાન્તર છે.
માટે એકજ સીધી લીટીમાં ધ૦ પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત ઉપરથી અનુમાન થાયછે કે:—

(૧) સરખા પાયા ઉપર સરખા ત્રિકોણ હોય તો તેમની
ઉંચાઈ પણ યરોબર છે.

(૨) સરખા ત્રિકોણ યરોબર ઉંચાઈના હોય તો તેમના
પાયા યરોબર છે.

પ્રશ્ન.

(૧) આદિતિમાંદારેલી અગ લીટી અક ની નીચે પડેછે, તે
ઉપરથી જાય તો સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરેા.

(૨) કબિદુમાંથી સમાન્તર લીટીદારીને સિદ્ધાંત સિદ્ધ કરેા.

પહેલા ૪૦ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્નો.

(૧) “કોઈ બે ત્રિકોણો અથવા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણોમાં
(૧) પાયાની સમાનતા (૨) ઉચ્ચાઈની સમાનતા (૩) લેવકૂળની
સમાનતા, એ ત્રણમાંથી બે આપી હોય તો ત્રિજી નિકળશે”
આ વાક્યમાંથી છ સિદ્ધાંતો ઉપજી શકેછે, તેઓની પ્રતિષ્ઠા
લખો અને સિદ્ધ કરો.

(૨) જે ચતુષ્કોણના બંને કર્ણો તેને દુભાગેછે, તે ચતુષ્કોણ
સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ છે.

(૩) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી ચાર
ત્રિકોણો થાયછે તે બરોબર છે.

(૪) કોઈપણ ચતુષ્કોણના બે કર્ણોથી થયેલા બે સામ-
સામેના ત્રિકોણો બરોબર હોય તો બાકી રહેલી બે બાજુઓ
સમાન્તર થશે.

(૫) એક ત્રિકોણની બધી બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સાંધ-
વાથી જે ચાર ત્રિકોણો થાય તે બરોબર છે.

(૬) એક કાટખૂણુ ચતુષ્કોણની પાસપાસેની બાજુના મધ્ય-
બિંદુઓ સાંધતાં એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ થશે.

(૭) એક ચોરસની પાસપાસેની બાજુનાં મધ્યબિંદુઓ
સાંધતાં એક ચોરસ થશે.

(૮) એક ત્રિકોણની એક બાજુનાં કોઈપણ બિંદુમાંથી
બીજી બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સુધી લીટીઓ દોરતાં જે
ચતુષ્કોણ થશે તે ત્રિકોણનો અધે થશે.

(૯) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણની એક બાજુના બંને
છેડામાંથી સામેની બાજુનાં કોઈપણ બિંદુસુધી લીટીઓ દોરી
તો જે ત્રણ ત્રિકોણો થશે તેમાં એક બીજા બેના સર્વાંગો બરો-
બર થશે.

(૧૦) એક ત્રિકોણની બે બાજુઓનાં મધ્યબિંદુ સામેના ખૂણા સાથે સાંધવાથી જે ત્રણ ત્રિકોણ અને એક ચતુષ્કોણ થશે, તેમાં સામસામેના ત્રિકોણો બરાબર થશે, અને બાકી રહેલા ત્રિકોણ ચતુષ્કોણની બરાબર થશે.

(૧૧) સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની એક બાજુના મધ્યબિંદુમાંથી સામેના બાજુના એક છેડા સુધી લીટી દારવાથી જે ત્રિકોણ થશે તે સંબંધિત ચતુષ્કોણનો એક ચતુર્થાંશ થશે.

(૧૨) ૧. ૧૬ ની આકૃતિમાં અબક, કબક ત્રિકોણો દોત્રફળમાં બરાબર છે.

(૧૩) એક એવી લીટી દોરો કે તેમાંનું કોઈ પણ બિંદુ એક આપેલા ત્રિકોણના પાયાના બે છેડા સાથે સાંધાયે તો જે નવા ત્રિકોણો થાય તે આપેલા ત્રિકોણની બરાબર થાય.

(૧૪) એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ એવા દોરો કે એક આપેલા ત્રિકોણની બરાબર હોય અને તેજ પાયા ઉપર હોય.

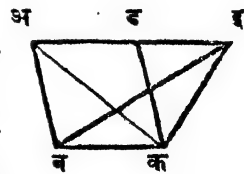
(૧૫) કોઈ પણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણનું દોત્રફળ, તેની બરાબર પાયા તથા ઉચ્ચાઈના એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણના દોત્રફળની બરાબર છે; અને એક એવાજ ત્રિકોણનું દોત્રફળ એ દોત્રફળના અર્ધની બરાબર છે.

સિદ્ધાંત ૪૧. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ અને એક ત્રિકોણ એકજ પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરબાજુઓની વચ્ચે હોય, તો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ ત્રિકોણનો બમણો થશે.

સાધન.

દોરો કે અબકડ સંબંધિત ચતુષ્કોણ તથા કબક ત્રિકોણ એકજ બક પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ બક, અદ ની વચ્ચે છે.



તો અવકડ સમાન્તરબાળૂ ચતુષ્કોણુ ઇવક ત્રિકોણુનો
બમણો થશે.

રચના:—અક સાંધો.

સિદ્ધતા.

અવક ત્રિકોણુ ઇવક ત્રિકોણુની બરોબર છે,
કારણ કે તેઓ એકજ વક પાયા ઉપર, અને એકજ
સમાન્તરલીટીઓ વક, અડ ની વચ્ચે છે. (૧. ૩૭)
પણ અવકડ સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ અવક ત્રિકોણુનો
બમણો છે,

કારણ કે અક કર્ણ તેને દુભાગે છે. (૧. ૩૪)

માટે, અવકડ સમાન્તરબાળૂ ચતુષ્કોણુ ઇવક ત્રિકો-
ણુનો પણ બમણો છે.

માટે, એક સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ ધ૦ પ્ર. સિ.

ટીપ:—આ સિદ્ધાંત બીજી રીતે આ પ્રમાણે બતાવાય:—

જો એક સમાન્તરબાળૂ ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુના પાયા તથા
ઉંચાઈ બરોબર હોય, તો સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ ત્રિકોણુનો બમ-
ણો થશે.

તેમજ:—જો એક સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુની ઉં-
ચાઈ બરોબર હોય, અને ત્રિકોણુને પાંચા સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુના
પાયાનો બમણો હોય તો તે ચતુષ્કોણુ તથા ત્રિકોણુ બરોબર
થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ અને એક ત્રિકોણુ બરોબર
પાયા ઉપર અને એકજ સમાન્તરલીટીઓ વચ્ચે હોય, તો
સંખ્યા૦ ચતુષ્કોણુ ત્રિકોણુના બમણા બરોબર થશે.

(૨) એક કાટખૂણુ સમદ્વિબાળૂ ત્રિકોણુ એવો બનાવો
કે તે એક આપેલા ચોરસની બરોબર હોય.

(૩) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની બહાર એક બિંદુ લઈને તેને બે સામસામેની બાજુના છેડાઓ સાથે સાંધાયેલા બે બે ત્રિકોણો થશે તેના ક્ષેત્રફળની બાદબાકી આપેલા ચતુષ્કોણની અર્ધ થશે.

સિદ્ધાંત ૪૨. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક એવો સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ કરો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરાબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરાબર થાય.

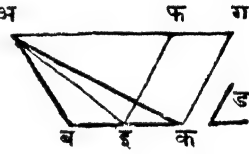
સાધન.

ધારો કે અબક આપેલો ત્રિકો- અ
ણ છે,

અને ડ આપેલો ખૂણો છે,

તો એક સંબાંધ ચતુષ્કોણ અબક
ત્રિકોણની બરાબર, અને તેનો

એક ખૂણો ડ ખૂણાની બરાબર હોય, એવો કરવો છે.



રચના.

બક લીટીને હ બિંદુમાં દુભાગો; (૧. ૧૦) અને અહ
સાંધો;

કહ લીટીમાં હ બિંદુ આગળ કહક, ખૂણો ડ બરાબર
કરો; (૧. ૨૩).

અને અ બિંદુમાંથી અકગ લીટી ફક ને સમાન્તર
દોરો. (૧. ૩૧)

અને ક બિંદુમાંથી કગ લીટી ફક ને સમાન્તર દોરો.
ત્યારે કહકગ બાગેલો સંબાંધ ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

અબક અને અકક ત્રિકોણો બરાબર છે,

કારણ કે તેઓ બરોબર પાયા થઈ. હક ઉપર છે, અને એકજ સમાન્તરલીટીઓની વચ્ચે છે. (૧. ૩૮)

માટે અવક ત્રિકોણ અહક નો બમણો છે;

પણુ ફક્ત સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ અહક ત્રિકોણનો બમણો છે.

કારણ કે તેઓ એકજ પાયા હક અને એકજ સમાન્તર લીટીઓ હક, અગતી વચ્ચે છે. (૧. ૪૧)

માટે ફક્ત સંખ્યા ચતુષ્કોણ અવક ત્રિકોણની બરોબર થયો.

અને વળી તેનો એક ખૂણો ફક્ત આપેલા ૩ ખૂણાની બરોબર છે.

માટે એક એવો સંખ્યા ચતુષ્કોણ કીધો ઇં. ક. ક.

પ્રત્ત.

(૧) આ સિદ્ધાંત અવલીટીના અર્ધઉપર સંખ્યા ચતુષ્કોણ કહાડી બતાવો.

(૨) ૩ ખૂણાની બરોબરનો ખૂણો ક અથવા જ આગળ બતાવીને માળ્યા પ્રમાણેનો સંખ્યા ચતુષ્કોણ કરો.

(૩) આપેલો ખૂણો પહેલો ખૂણો લઈને કૃત્ય કરો.

(૪) એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર એક ચોરસ બતાવો.

(૫) એક સંખ્યા ચતુષ્કોણ એવો બતાવો કે એક આપેલા ચોરસની બરોબર થાય અને તેજ પાયા ઉપર હોય અને તેનો એક ખૂણો એક કાટખૂણોનો અર્ધ હોય.

(૬) એક ત્રિકોણ એવો બતાવો કે જે એક આપેલા સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની બરોબર થાય અને જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર થાય.

(૭) એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ એવો બતાવો કે તે એક

આપેલા ત્રિકોણની બરાબર હોય, અને તેની બાજુઓના સર્વાંગો ત્રિકોણના બાજુઓના સર્વાંગોની બરાબર હોય.

(૮) એક કાટખૂણ ચતુષ્કોણની બરાબર કોણરૂપના એક સમદ્વિબાજુ ત્રિકોણ બનાવેા હોય તો ત્રિકોણની પરિમિતિ (બાજુઓના સર્વાંગો) ચાખૂણની પરિમિતિ કરતાં વધારે થશે.

વ્યાખ્યા:—એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણના કણમાં એક બિંદુ લઈએ. અને તેમાંથી સમબાજુ ચતુષ્કોણની બાજુઓને સમાન્તરલીટીઓ દોરીએ તો તે આખી આકૃતિના જે ચાર ભાગ થશે, તેમાંથી જે બેમાંથી કણ પાર જાયછે, તેને “કણની વ્યાસપાસના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો” કહેવા; અને જે બીજા બે તે આકૃતિ પૂરી કરવાને બાકી રહ્યા તેને તે “સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ” અથવા પૂરકસમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો” કહેવા.

જો નકે નીચેના સિક્ષાંતની આકૃતિમાં અહલહ અને લગલગ એ કણની વ્યાસપાસના તથા હલકડ અને હલગલ એ પૂરક-સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો થયા.

સિક્ષાંત ૪૩. પ્રમેય.

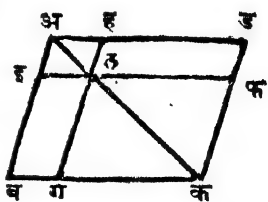
પ્રતિજ્ઞા:—કોઈ પણ સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણમાં કણની વ્યાસપાસના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણની પૂરવણીઓ બરાબર છે.

સાધન.

ધારો કે અલકડ એક સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણ છે ;

અને લડ, લગ તેના પૂરકસમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો છે ;

એ હે. તેના કણ અકની વ્યાસપાસના સમાન્તરબાજુ ચતુષ્કોણો હલ, ગલની પૂરવણીઓ છે.



તારે પૂરકસંખ્યાં ચતુષ્કોણુ બલ પૂરકસંખ્યાં ચ-
તુષ્કોણુ લડની યરોયર થશે.

સિદ્ધતા.

હહ સમખાળુ ચતુષ્કોણુ છે, અને અલ તેનો કર્ણુ છે.
મોઁ મહલ ત્રિકોણુ મહલ ત્રિકોણુની યરોયર છે. (૧. ૩૮)
એજ પ્રમાણે, લગલ ત્રિકોણુ લગલ ત્રિકોણુની યરો-
યર છે.

પણુ આખો અઢક ત્રિકોણુ આખા અઢક ત્રિકોણુની
યરોયર છે,

કારણુ કે અઢક કર્ણુ તેને કુભાગેછે; (૧. ૩૮)

મોઁ બાકી રહેલો પૂરકસંખ્યાં ચતુષ્કોણુ બલ બાકી
રહેલા પૂરકસંખ્યાં ચતુષ્કોણુ લડની યરોયર છે.

મોઁ કોઈપણુ સંખ્યાં ચતુષ્કોણુના ધર્મ. પ્ર. તિ.

પ્રશ્ન.

(૧) જો ચાર માંહેલા ચતુષ્કોણુ છે તે સમાન્તરખાળુ ચતુ-
ષ્કોણુ છે એવું બતાવો; અને તેઓ આપેલા સંખ્યાં ચતુષ્કો-
ણુને સમકોણુ છે એવું બતાવો.

(૨) ખીજે કર્ણુ દોરીને તેમાં બિંદુ લઈને સિદ્ધાંત સિદ્ધ
કરો.

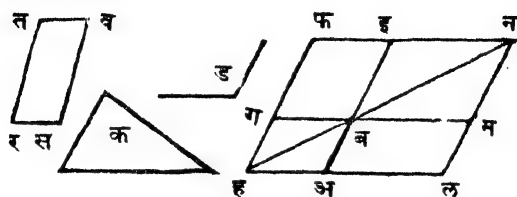
(૩) જો કર્ણુમાં બે બિંદુઓ લઈને તે બન્નેમાંથી સમાન્તર
લીટીઓ દોરી તો જૂદી જૂદી કેટલી આકૃતિઓ થશે?

તે બધા સંખ્યાં ચતુષ્કોણુ છે એવું બતાવો, અને તેમાંના
કયા કયા યરોયર છે તે બતાવો.

સિદ્ધાંત ૪૪. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટીને એક એવો

સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ લગાડવો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.



(એક સઠ બાજુ ચતુષ્કોણ એક લીટીને લગાડવો, એટલે એક એવો સઠ બાજુ ચતુષ્કોણ કહાડવો કે તે લીટી તેની એક બાજી થાય.)

સાધન.

ધારો કે અબ આપેલી લીટી છે; ક આપેલો ત્રિકોણ છે; અને હ આપેલો ખૂણો છે.

તો અબ સીધી લીટીને એક એવો સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ લગાડવો છે કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર હોય અને તેનો એક ખૂણો હ ખૂણા બરોબર હોય.

રચના.

એક સમબાજી ચતુષ્કોણ રસવત એવો બનાવો કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર હોય, અને તેનો સ ખૂણો હ ખૂણા બરોબર હોય. (૧. ૪૨)

અબ લીટી વધારીને બહુ લીટી સબ બરોબર કાપો;

બ ખિંદુ આગળ હબ લીટીમાં હબગ ખૂણો સ ખૂણા બરોબર કરો; (૧. ૨૩)

બગ લીટી રસ બરોબર કાપો;

હ વ્યને ગ બિદુવ્યોમાંથી ફક, ગફ લીટીવ્યો વગ, વહને
વ્યસ્પરસ સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)

હવે વફ વ્યેક સમાન્તરખાળૂ ચતુષ્કોણ થયો, જે
રચના પ્રમાણે સતતની વ્યેલે ક ત્રિકોણની વ્યેવર છે;
વ્યને તેનો વ ખૂણો ડ ખૂણો વ્યેવર છે.

અ બિદુમાંથી અહ લીટી વગ વ્યથવા ફકને સમાન્તર
દોરો; (૧. ૩૧)

વ્યને ફગ ને લંખાવતાં ધારો કે તે હ બિદુમાં મળે છે.

હવ સાંધો;

હવે, અહ વ્યને ફક સમાન્તર છે, વ્યને ફક લીટી
તેવ્યોને મળે છે,

મો, અફ વ્યને ફક ધૂણા મળીને વે કાઢખૂણા
વ્યેવર છે, (૧. ૨૯)

મો, વફ વ્યને ફક મળીને વે કાઢખૂણા ફરતાં
વ્યેવર છે;

મો, હવ વ્યને ફક લીટીવ્યોને વ વ્યને ફ તરફ લંખા-
વતાં મળશે. (પ્ર. પ્ર. ૧૨)

ધારો કે તેવ્યો ન બિદુમાં મળે છે.

ન બિદુમાંથી નલ લીટી ફક વ્યથવા ફક ને સમાન્તર
દોરો. (૧. ૩૧)

વ્યને ધારો કે ફક, ગવ ને લંખાવતાં તેવ્યો નલ ને લ
વ્યને ન બિદુવ્યોમાં મળે છે.

ત્યારે વલ માગેલો સંખ્યા ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

ફકલન વ્યેક સમાન્તરખાળૂ ચતુષ્કોણ છે.

મો, લવ, વફ પૂરક સંખ્યા ચતુષ્કોણ થયા.

માટે, લવ સં બાં ચતુષ્કોણ બક્ષની બરોબર છે; (૧.૪૩)

પણ ક ત્રિકોણ બક્ષની બરોબર છે; (૨૫.)

માટે, લવ સં બાં ચતુષ્કોણ પણ ક ત્રિકોણની બરોબર છે.

વળી અવમ ખૂણો સામેના ખૂણા ગવહની બરોબર છે; (૧.૧૫)

પણ ગવહ ખૂણો તો ડ ખૂણા બરોબર છે, (૨૫૦)

માટે, અવમ ખૂણો પણ ડ ખૂણા બરોબર છે.

અને વળી લવ સં બાં ચતુષ્કોણની અવ એક બાજુ છે;

માટે અવ લીટીને એક એવો સં બાં ચતુષ્કોણ લવ લગાડ્યો કે તે ક ત્રિકોણની બરોબર છે,

અને તેનો એક ખૂણો અવમ આપેલા ખૂણા ડ ની બરોબર છે.

માટે, એક આપેલી સીધી લીટી ધં ક. ક.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૨ અને ૪૪ સિક્કાંતો વચ્ચે શો ફેર છે ?

(૨) અવ લીટીને જ આગળથી નહિ, પણ જ આગળથી લંબાવીને દૃત્ય કરો.

(૩) જહ લીટી ન સાંધતાં, અગ સાંધીને, પછી સર્વ રચના ઉપર પ્રમાણે જ કીધી, તો જેવો જોઈએ છે તેવો સં બાં ચતુષ્કોણ થશે કે નહિ.

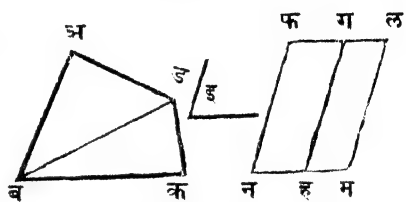
(૪) એક એવો કાઠખૂણ ચતુષ્કોણ કહાડો કે તે એક આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય અને તેની એક બાજુ એક આપેલી લીટી બરોબર હોય.

સિદ્ધાંત ૪૫. કૃત્ય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક એવો સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ બનાવો કે તે એક આપેલી સીધીલીટી વ્યાકૃતિની યરોબર થાય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની યરોબર થાય.

સાધન.

ધારો કે અબકડ એક આપેલી સીધી-લીટી વ્યાકૃતિ છે; અને હ આપેલો ખૂણો છે. તો એક સમાન્તર



રબાજી ચતુષ્કોણ એવો બનાવવો છે કે જે અબકડ ની યરોબર થાય, અને જેનો એક ખૂણો હ ખૂણા યરોબર થાય. રચના.

બડ સાંધો;

અબક ટ્રિકોણની યરોબર એક ફહ સમાન્તરબાજી ચતુષ્કોણ બનાવો. જેનો ફનહ ખૂણો હ ખૂણા યરોબર હોય. (૧. ૪૨)

અને ગહ લીટીને એક ગમ સં બાં ચતુષ્કોણ લગાડો, જે અબક ટ્રિકોણની યરોબર હોય, અને જેનો ગહમ ખૂણો હ ખૂણાની યરોબર હોય. (૧. ૪૪)

ત્યારે ફનમલ માગેલો સં બાં ચતુષ્કોણ થશે.

સિદ્ધતા.

ગહમ અને ફનહ દરેક હ ખૂણાની યરોબર છે.

માટે ફનહ ખૂણો ગહમની યરોબર છે.

એ દરેક સરખા ખૂણામાં ગહન ખૂણો ઉભેરો;

તો ફનહ અને ગહન ખૂણા ગહમ અને ગહન ખૂણાની યરોબર છે. (પ્ર.પ્ર.૨)

પણુ કનહ, ગહન મળીને એ કાડખૂણા ઘરોઘર છે;

(૧. ૨૯)

માટે, ગહમ, ગહન ખૂણા પાણુ એ મળીને એ કાડખૂણા
ઘરોઘર છે.

માટે, નહ, હમ, એ એ લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં
છે, (૧. ૧૪)

વળી, નમ વ્યને કમ સમાન્તર છે, વ્યને તેઓને હમ
મળેછે,

માટે મહગ, હમક વ્યુત્કંઠ ખૂણાઓ ઘરોઘર છે;
(૧. ૨૯)

એ બન્નેમાં હમલ ખૂણા ઉગેરો;

ત્યારે મહગ, હમલ ખૂણા મળીને હમક, હમલ ખૂણાની
ઘરોઘર છે.

પૂણુ હમ લીટી ગલ ને સમાન્તર છે, વ્યને તેઓને હમ
મળેછે,

માટે, મહગ, હમલ ખૂણા એ મળીને એ કાડખૂણા
ઘરોઘર છે; (૧. ૨૯)

માટે, હમક, હમલ ખૂણા પાણુ એ મળીને એ કાડખૂણા
ઘરોઘર છે.

માટે, કમ, ગલ લીટીઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે.
(૧. ૧૪)

વ્યને વળી નક વ્યને મલ દરેક હમને સમાન્તર છે. (૨૨.)

માટે નક લીટી મલને સમાન્તર છે. (૧. ૩૦)

વ્યને નમ, કલ સમાન્તર છે, (૨૨.)

માટે, કનમલ સમાન્તર પાણુ ચતુષ્કોણ થયો. (વ્યા. ૩૬)

વ્યને કહ સૌ પા૦ ચતુષ્કોણ અબડ ત્રિકોણની ઘરો-
ઘર છે, (૨૨.)

અને ગમ સં બાં ચતુકોણુ ઢબક ત્રિકોણુની બરો-
બર છે; (૨૫.)

મોટા આપણો કનકલ સં બાં ચતુકોણુ અબકડ આ-
કૃતિની બરોબર છે;

અને તેનો કનક ખૂણુ ૬ બરોબર છે.

એજ પ્રમાણે આપેલી આકૃતિ ચારથી વધારે બાજુ-
ની હોય તેના બરોબર પણ સં બાં ચતુકોણુ બનાવી
શકાય.

મોટે, એક એવો સં બાં ચતુકોણુ ૪૦ ક.ક.
ઉપસિદ્ધાંત:—એક આપેલી લીટી ઉપર એક એવો
સમાનરબાજુ ચતુકોણુ લગાડવો કે જે એક આપેલી સીધી-
લીટી આકૃતિની બરોબર હોય, અને જેનો એક ખૂણુ આપેલા
ખૂણુ બરોબર હોય.

ટીપ:—જો આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજુની હોય તો તેનું
એક શિરોબિંદુ બીજા બિંદુએ સાથે સાંધતાં ત્રણ ત્રિકોણુ થશે,
તેમાં બે ત્રિકોણુની બરોબર તો ઉપર બતાવ્યા પ્રમાણે એક
સંબાં ચતુકોણુ બનાવી શકાશે; પછી ભમ લીટી ઉપર એક સં
બાં ચતુકોણુ એવો લગાડાડે તે બાકી રહેલા ત્રિકોણુની બરોબર
હોય; અને તેના મ આગળનો ખૂણુ આપેલા ખૂણુ બરોબર
હોય; એટલે, આ નવી થયેલી આકૃતિ સંબાં ચતુકોણુ સિદ્ધ
થઈ શકશે, અને તે માગવા પ્રમાણેનો છે એ તો સ્પષ્ટ જ છે.

એજ પ્રમાણે પાંચથી પણ વધારે બાજુએ આપેલી
આકૃતિની હોય તો કર્યા જવું.

પ્રશ્ન

(૧) આપેલી આકૃતિ પાંચ બાજુની હોય તો ઉપરું કૃત્ય
કરી આપો.

(૨) એક આપેલી સીધીલીટી આકૃતિ બરોબર એક કાટ-
ખૂણુ ચતુકોણુ કહાડવો.

પહેલા ૪૫ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના ખૂણાબિંદુઓમાંથી તેના કણીને સમાન્તર લીટીઓ દોરી હોય તો એક નવો સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ પેદાના બમણો થશે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણના એક કણીની આસપાસના સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણના કણીની એક જોડ સમાન્તર છે.

(૩) એક આપેલા ત્રિકોણની બરોબર એક ખીજે ત્રિકોણ કઠાડવો, જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણાની બરોબર હોય.

(૪) એક સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણની બરોબર એક ખીજે સંખ્યા ૦ ચતુષ્કોણ કઠાડવો, જેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણો બરોબર હોય.

(૫) એક આપેલા સમાન્તરબાજૂ ચતુષ્કોણ બરોબર એક સમબાજૂ ચતુષ્કોણ કઠાડો.

(૬) એક એવો ત્રિકોણ બનાવો કે તે આપેલા ત્રિકોણ બરોબર હોય, અને તેનો એક ખૂણો એક આપેલા ખૂણો બરોબર હોય, અને તે ખૂણાની જોડની એક બાજુ એક આપેલા લીટી બરોબર હોય.

(૭) એક ત્રિકોણની એક બાજુમાં આપેલા એક બિંદુમાંથી એવી લીટી દોરો કે તે તે ત્રિકોણના બે સરખા ભાગ કરે.

સિદ્ધાંત ૪૬. કૃત્ય.

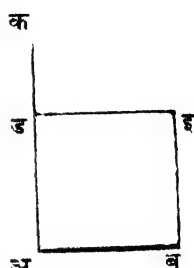
પ્રતિજ્ઞા:—એક આપેલી સીધી લીટી ઉપર એક ચોરસ કરવો.

સાધન.

અવ વ્યાપેલી સીધી લીટી છે; તેના ઉપર એક ચોરસ કરવાનો છે.

રચના.

અ બિંદુમાંથી અવ લીટી અવ ને લંબ દોરો; (૧. ૧૧) અ



અડ લીટી અવ ને લીટી કરો; (૧. ૩)

ડ બિંદુમાંથી ડહ લીટી અવ ને સમાન્તર દોરો; (૧. ૩૧)

અને વ બિંદુમાંથી વહ લીટી અડ ને સમાન્તર દોરો; ધારો કે તે ડહ લીટીને હ બિંદુમાં છેદે છે.

તો અડહવ એક ચોરસ થશે.

સિદ્ધતા.

રચના પ્રમાણે અડહવ એક સમાન્તરબાજીનું ચતુષ્કોણ છે,

માટે, અવ લીટી ડહ ની પારોબર છે; અને અડ, વહ પારોબર છે; (૧. ૩૪)

પણ અડ લીટી અવ પારોબર છે;

માટે, ચારે બાજીઓ અવ, અડ, ડહ, વહ એકેકને પારોબર છે;

એટલે, અડહવ વ્યાકૃતિ સમબાજીનું છે.

વળી વઅડ ખૂણો કાટખૂણો છે, (૨૫.)

અને, અડ, વહ સમાન્તર લીટીઓ ઉપર અવ પડે છે.

માટે વઅડ, અવહ મળીને બે કાટખૂણા પારોબર છે. (૧. ૨૬)

માટે, અવહ ખૂણો પણ એક કાટખૂણા પારોબર હોવો જોઈએ.

અને તેઓની સામેના ખૂણા અતુકને તેઓની બરો-
બર છે. (૧. ૩૪)

માટે, દરેક ખૂણો એક કાટખૂણા બરોબર છે.

એટલે, અઘડ એક ચોરસ થયો;

અને તે અઘ લીટી ઉપર બનાવ્યો છે.

માટે એક આપેલી લીટી ઇ૦

કૃ. કૃ.

ઉપસિદ્ધાંત:—(૧) એક સમાન્તરબાજૂ અતુકોણનો એક
ખૂણો કાટખૂણો હોય તો બધા ખૂણા કાટખૂણા થશે; એ
વિશે ૩૪ માં વ્યાખ્યાની ટીપમાં કહ્યું છે.

(૨) એક સમાન્તરબાજૂ અતુકોણની બે પાસપાસેની
બાજૂઓ બરોબર હોય; અને તેઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટ-
ખૂણો હોય, તો તે એક ચોરસ થશે.

પ્રશ્ન.

(૧) એક લીટી ઉપર કેટલા ચોરસ બનાવી શકાય?

(૨) બરોબર બાજૂ ઉપરના ચોરસ પણ બરોબરજ હોવા
જોઈએ.

(૩) જો બે લીટીઓ બરોબર હોય તો એક લીટી ઉપ-
રના ચોરસ ખીજી લીટી ઉપરના ચોરસની બરોબર થશે.
(કર્ણ દોરવાથી જો બંને ત્રિકોણો થશે તે સેહેજમાં બરોબર
છે એવું સાબિત થઈ શકશે).

સિદ્ધાંત ૪૭. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—એક કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં કર્ણ ઉપર
કહાડેલો ચોરસ ખીજી બે બાજૂઓ ઉપર કહાડેલા
ચોરસના સર્વાણાની બરોબર છે.

સાધન.

ધારો કે અઘ એક કાટખૂણુ ત્રિકોણ છે,

હવે બલ સંખ્યાં વ્યુત્કોણુ અબડ ત્રિકોણુનો
ખમણો છે,

કારણુ કે તેઓ એકજ પાયા વડ ઉપર વ્યને એકજ
સમાન્તર લીટીઓ વડ વ્યને અલની વચ્ચે છે. (૧.૪૧)

વ્યને ગવ ચોરસ ફબક ત્રિકોણુનો ખમણો છે,

કારણુ કે તેઓ એકજ પાયા ફબ ઉપર વ્યને એકજ
સમાન્તર લીટીઓ ફબ, ગકની વચ્ચે છે, (૧.૪૧)

પણુ સરખી વસ્તુઓનાં ખમણાં સરખાંજ હોવાં
જોઈએ; (પ્ર. પ્ર. ૧)

માટે બલ સંખ્યાં વ્યુત્કોણુ ગવ ચોરસની પરોપર
છે.

એજ પ્રમાણે, અદ, વમ સાંધવાથી, એમ સિદ્ધ કરી
શકીશું કે કલ સંખ્યાં વ્યુત્કોણુ કલ ચોરસની પરો-
પર છે.

માટે આખો ચોરસ વહ, એ ચોરસો વગ વ્યને ફક
ના સર્વાળાની પરોપર છે.

એટલે, વક કણુ ઉપર કહાડેલો ચોરસ એ બાજુઓ
અવ, વક ઉપર કહાડેલા ચોરસોના સર્વાળાની પરોપર છે.

માટે એક કાટખૂણુ ત્રિકોણુમાં છે. પ્ર. સિ.

ટીપ્પણી—દરેક ચોરસ બહારથી દોરેલો છે; પણ તેમ કરવું આ-
વશ્યક નથી; બધા અંદર પડતા અથવા હર કોઈ એક
અથવા એ અંદર પડતા કહાડીશું તોપણુ સિદ્ધતા મળી શકશે
માટે જૂદી જૂદી આઠ આકૃતિઓ થઈ શકે.

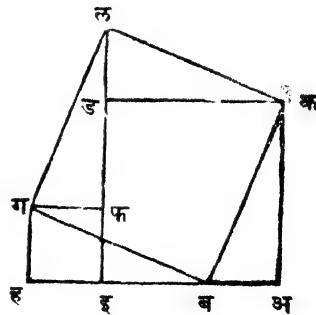
(૨) કોઈપણ બાજુ ઉપરના ચોરસનું ક્ષેત્રફળ તે બાજુને
તેટલેજ ગુણુવાથી આવે. માટે, અંકગણિતની રીતે આ
સિદ્ધાંત કહેવો હોય તો એમ કહેવાય કે એક કાટખૂણુ
ત્રિકોણુના કણુની લંબાઈનો વર્ગ તેની બન્ને બાજુઓની લંબા-
ઈના વર્ગના સર્વાળાની પરોપર છે.

(૩) માટે ત્રણમાંથી હરકોઈ બે બાજુ ઝોની લંબાઈ આપી હોય તો ત્રીજીની લંબાઈ નીકળી શકશે.

(૪) ગમે ઝેટલી સીધી લીટી ઝો આપી હોય તો એક ઝેવી સીધી લીટી શોધી કહાડવી કે તેના વર્ગ આપેલી બધી લીટી-ઝોના વર્ગના સર્વાંગાની બરાબર હોય, આ કરવું સહેલું છે, ગમે તે બે લીટી લઈને તેમને છેડેથી એકેક ઉપર લંબ મૂકવી ઝેટલે તેમના ખીન્ન છેડા જોડવાથી નવી લીટી નિકળશે જેના વર્ગ તે બેના વર્ગના સર્વાંગા બરાબર થશે પછી તે લીટીને એક છેડેથી એક ત્રીજી લીટી જેટલી લંબ મારીને, છેડા સાંધીશું તો એક નવી લીટી નિકળશે ઇ.; એમજ વર્ગોની બાદબાકી પણ થઈ શકશે.

આ સિદ્ધાંતના જે ખીન્ન પૂરાવા આપી શકાય છે તેમાં એક ધણે ટુંકા અને ચતુરાઈવાળા છે એટલુંજ નહિ પણ તેમાં ઊર મા સિદ્ધાંત પછીના કોઈ સિદ્ધાંત આધાર માટે લીધા નથી; અને કાગળ અથવા લાકડાના કકડા તેવા આકારના લેવાથી એક ચોરસના કકડા ગોઠવતાં બરાબર ખીન્ન બે ચોરસ આપણી નજર સમક્ષ થઈ શકે છે; તે એક સિદ્ધતા નીચે ટુંકામાં આપી છે.

અબક આપેલો ત્રિકોણ છે અ કાટખૂણો; અક ઉપર અકડહ ચોરસ કીધો. હડ લીટીમાંથી ફફ=બઅ કાપી. ફફ ઉપર ફફગહ ચોરસ કીધો. હડને લંબાવીને ડલ=અબ કીધી; કલ, લગ, ગવ સાંધી.



હલ=અવ ∴ હલ + હફ = અવ + હફ = હફ + હફ = હહ = અક
તેમજ હવ = હહ + હવ = અવ + હવ = અહ = અક.

આ ઉપરથી ચારે ત્રિકોણો અવક, વગહ, લગફ અને
લડક બરાબર થશે, કારણ કે દરેકમાં બે બાજુઓ અને
ત્રણેનો કાટખૂણો સરખાં છે.

મોટે લગકવ આકૃતિ સમબાજુ થઈ,

$\sqrt{\text{લકવ}} = \sqrt{\text{લકડ}} + \sqrt{\text{ડકવ}} = \sqrt{\text{અકવ}} + \sqrt{\text{ડકવ}} + \sqrt{\text{ડકઅ}}.$

મોટે લકવ કાટખૂણો થયો; એજ પ્રમાણે ચારે ખૂણા
કાટખૂણા સિદ્ધ થશે, મોટે એ આકૃતિ ચારસ છે અને વક
લીટી ઉપર ચારસ છે.

એ ચારસમાંથી બે ત્રિકોણો લડક અને લગફ બાદ કરે
અને તેઓની બરાબરના ત્રિકોણો અવક અને વગહ ઉમેરે
તો બરાબર અડ અને ગહ ચારસો થશે.

આ સિદ્ધાંત ગણિતવિદ્યાના હરેક ભાગમાં બેહદ ઉપયો-
ગના છે. એમાંથી હદ ઉપરાંત પરિણામો નિકળેછે; આખી
ભૂમિતિનાં મુળતત્ત્વોમાં એ ઘણાજ પ્રખ્યાત છે. એટલુંજ
નાહ પણ એના ઉપર માપણીના બધા સિદ્ધાંતો તથા ત્રિકોણ-
મિતિની વિદ્યા આધાર રાખેછે.

કહેછે કે એ પ્રતિમા બ્યારે પિથાગોરસે શોધી કહાડી અને
તેના સત્યતા વિશે બ્યારે તેને પહેલું માન થયું ત્યારે તેને
એટલો હર્ષ પ્રાપ્ત થયો કે તેણે એકસો જનાવરનો મ્હોટો
બક્ષીદાન દેવતાઓને આપ્યો (અર્પણ કર્યો).

પ્રશ્ન.

(૧) આકૃતિ ઉપરથી સાબિત કરો કે:—

- (૧) વગ, વહ જોડિયે તો તેઓ સમાન્તર થશે;
- (૨) વ, અ, મ બિંદુઓ એકજ સીધી લીટીમાં છે;
- (૩) વક અને અડ એકેકને લંબ છે;

(૨) એક ચારસના કણ ઉપર દોરેલો ચારસ અસલ ચો-
રસનો બમણો થશે.

(૩) જો કોઈપણ ત્રિકોણના શિરોબિંદુથી પાયા ઉપર લંબ દોરે, તો ખેડો (પાયાના જે ભાગે) ના વર્ગની બાદબાકી તે જે બાજુએના વર્ગની બાદબાકીની બરાબર થશે.

(૪) જે કાટખૂણુ ત્રિકોણમાં એકનો કણ અને એક બાજુ અનુક્રમે ખીજના કણ અને એક બાજુની બરાબર હોય, તો તે જે ત્રિકોણે સર્વ પ્રકારે બરાબર થશે.

(૫) એક લીટી એવી શોધી કહોડા કે તે ઉપરનો ચારસ જે આપેલી લીટીએના ચારસની બાદબાકી બરાબર થાય.

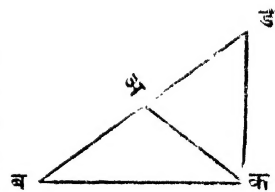
(૬) એક આપેલી સોધી લીટીના જે એવા ભાગ કરો કે એક ભાગ ઉપરનો ચારસ ખીજ ભાગ ઉપરના ચારસનો બમણો થાય.

સિદ્ધાંત ૪૮. પ્રમેય.

પ્રતિજ્ઞા:—જો એક ત્રિકોણની એક બાજુ ઉપર કીધેલો ચોરસ ખીજ જે બાજુ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળની બરાબર હોય, તો તે જે બાજુઓની વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થશે.

સાધન.

ધારો કે અબક એક ત્રિકોણ છે; અને બક ઉપર કહોડેલો ચોરસ અબ, અક ઉપરના ચોરસોના સર્વાળની બરાબર છે;



તો અબક ખૂણો કાટખૂણો થશે.

રચના.

અ બિંદુ માંથી અડ લીટી અક ને લંબ દોરો; (૧. ૧૧)

અને અડ ને અબ બરાબર કરો. (૧. ૩)

ડક સાંધો.

સિદ્ધતા.

અડ લીટી અવની યરોઅર છે, (૨૨.)

માટે અડ લીટી ઉપરનો ચોરસ અવ લીટી ઉપરના
ચોરસની યરોઅર થશે. (૧. ૮૬ પ્રશ્ન ૩ ને ટીપ.)

એ બન્નેમાં અક ઉપરનો ચોરસ ઉમેરો;

તો કઅ બને અડ ઉપરના ચોરસોનો સર્વાળો કઅ
બને અવ ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની યરોઅર છે.

પણ કઅડ ખૂણો કાઢખૂણો છે, (૨૨.)

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ અક, અડ ઉપરના ચોરસોના
સર્વાળાની યરોઅર છે. (૧. ૪૭)

પણ (પ્રતિજ્ઞા પ્રમાણે) વક ઉપરનો ચોરસ અક, અવ
ઉપરના ચોરસોના સર્વાળાની યરોઅર છે;

માટે કડ ઉપરનો ચોરસ વક ઉપરના ચોરસની
યરોઅર છે.

માટે કડ બાબતુ પણ વક બાબતુની યરોઅર હોવી જોઈએ.

માટે ડઅક, વઅક ત્રિકોણોમાં,

{ અડ લીટી અવની યરોઅર છે,

{ બને અક બન્નેમાં સાધારણ છે,

{ બને ત્રીજી બાબતુ કડ ત્રીજી બાબતુ વકની યરોઅર છે,

માટે, ડઅક ખૂણો વઅક ખૂણાની યરોઅર છે. (૧. ૮)

પણ ડઅક કાઢખૂણો છે; (૨૨.)

માટે વઅક પણ કાઢખૂણો થયો.

માટે જો એક ત્રિકોણની એક બાબતુ ઉપર ૬૦ પ્ર. સિ.

પ્રશ્ન.

(૧) ૪૭ બને ૮૮મા સિદ્ધાંતો વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૨) આ સિદ્ધાંતનો પુરવો કેવા પ્રકારનો છે? બને ભૂમિ-
તિના પહેલા પુસ્તકમાં એવા પુરાવાથી કયા સિદ્ધાંતો સાબિત
કીધા છે? તેમ કરવાનું કારણ શું?

(૩) જો અઘરું ત્રિકોણમાં અઘરું બાજુ અઘરું ની બમણી હોય, અને અઘરું નો વર્ગ અઘરું નો વર્ગનો ત્રણ ગણો હોય તો અઘરું બાજુ કાઠજુઓ થશે.

છેલ્લા ત્રણ સિદ્ધાંતો ઉપર પ્રશ્ન.

(૧) કોઈ લીટી ઉપરનો ચારસ તે લીટીના અર્ધ ઉપરના ચારસનો ચાર ગણો થશે; અને તેના ઝમક તૃતીયાંશ ઉપરનો ચારસનો નવ ગણો થશે.

(૨) ઝમક ત્રિકોણની ઝમક બાજુ ઉપરનો ચારસ બીજી બે બાજુઓ ઉપરના ચારસના સર્વાંગાથી વધારે હોય; તે તે બાજુઓ વચ્ચેનો ખૂણો પહેળોખૂણો હોયો જોઈએ.

(૩) ઝમક સમબાજુ કાઠજુ ત્રિકોણના કર્ણ અને ઝમક બાજુ વચ્ચે શો સંબંધ છે?

(૪) ઝમક કાઠજુ ત્રિકોણમાં ઝમક ખૂણો ઝમક કાઠજુઓનો તૃતીયાંશ હોય તો બીજા ખૂણો કેટલા કેટલા થવા જોઈએ? અને તેવા ત્રિકોણની દરેક બાજુ કર્ણનો કેટલો ભાગ થશે?

(૫) ઝમક સમબાજુ ત્રિકોણના ઝમક શિરોમિદુમાંથી સાંભળી બાજુ ઉપર દોરેલી લંબ દરેક બાજુનો કેટલો ભાગ થશે?

(૬) ઝમક કાઠજુ ત્રિકોણના કાઠજુઓથી કર્ણ ઉપર લંબ દોરીને કર્ણના દરેક ભાગના વર્ગના સર્વાંગામાં લંબના વર્ગનું બમાણું ઉમેરિયે તો કર્ણના વર્ગ બરોબર થશે.

(૭) ઝમક ચારસ એવો બનાવો કે તે બે આપેલા ચારસના સર્વાંગા બરોબર થાય.

(૮) ઝમક આપેલી સીધી લીટીના બે એવા ભાગ કરો કે તેઓના વર્ગનો સર્વાંગો ઝમક આપેલી લીટીના વર્ગની બરોબર થાય.

સમાપ્ત.

